



Nuno Rafael da Silva Peres

Licenciado em Ciências da Engenharia Civil

Formulação linear da Teoria Generalizada de Vigas para barras de eixo curvo

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre
em Engenharia Civil

Orientador: Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Auxiliar,
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Válder José da Guia Lúcio

Arguente: Manuel Ritto-Corrêa

Vogal: Rodrigo de Moura Gonçalves

“Copyright” Nuno Rafael da Silva Peres, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado critério ao autor e editor.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer ao meu orientador, Professor Rodrigo Gonçalves, pela disponibilidade, apoio, motivação, conhecimentos transmitidos e enorme paciência, não só ao longo da realização desta Dissertação, mas também durante o meu percurso académico. Gostava de agradecer aos meus pais, irmão, avós e tios, que sempre me apoiaram, incondicionalmente. Quero agradecer à Professora Ana Luísa Custódio por me incentivar e me ajudar a descobrir o mundo da investigação científica, que acreditou no meu potencial desde o primeiro ano do meu percurso académico. Deixo um enorme agradecimento aos meus colegas e amigos de faculdade, André Rodrigues, Carolina Carmo, Cláudia Manco, Filipa Santos, Gonçalo Pinheiro, Inês de Carvalho, Margarida Ferreira, Marta Monteverde, Miguel Henriques, Sofia Lopes, e aos meus colegas de Estruturas, Bruno Correia, David Manta, Hugo Rebelo, Gonçalo Palma e Pedro Mateus. Finalmente quero agradecer aos meus grandes amigos Alessandro Campos, Alexandra Luz, André Batista, António Luís, Diana Abegão, Diogo Felicíssimo, Eunice Pratas, Isa Monteiro, João Raposo, João Wiborg, Marta Casaca e Neuza Damásio, pela grande paciência que têm para suportar as minhas excentricidades.

Resumo

Neste trabalho desenvolve-se, implementa-se e valida-se uma formulação original da Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, da designação em língua inglesa, *Generalised Beam Theory*) para analisar o comportamento linear de barras de eixo curvo, com secção transversal de parede fina deformável. Em primeiro lugar, a formulação é desenvolvida para curvatura inicial arbitrária, sendo posteriormente simplificada admitindo que a curvatura é constante e apenas de flexão ou de torção (separadamente). O caso da curvatura de flexão é explorado em detalhe, procedendo-se à obtenção das equações fundamentais através da introdução das hipóteses cinemáticas usuais da GBT (Kirchhoff, Vlasov e inextensibilidade transversal das paredes), as quais permitem reduzir o número de graus de liberdade do problema sem perda de precisão da solução. Mostra-se que as equações obtidas (i) correspondem às da teoria clássica de Winkler-Bach (caso plano), (ii) são semelhantes às da teoria clássica de Vlasov (caso de flexão para fora do plano e torção) e (iii) são idênticas às do método das faixas finitas (com uma diferença num único termo da distorção de flexão). Para além disso, mostra-se que a curvatura da barra influencia significativamente as equações que permitem determinar os modos de deformação da secção transversal. Implementa-se um elemento finito de barra baseado na formulação desenvolvida, aproximando diretamente as funções de amplitude. Apresentam-se vários exemplos que ilustram as potencialidades do elemento proposto. Para efeitos de validação e comparação, utilizam-se resultados obtidos através das teorias clássicas (Winkler-Bach e Vlasov, sendo que neste último caso recorre-se a um elemento finito especialmente desenvolvido para o efeito) e de modelos de elementos finitos de casca convencionais.

Palavras-chave:

- Teoria Generalizada de Vigas (GBT)
- Barras de eixo curvo
- Barras de parede fina
- Deformação da secção

Abstract

First-order Generalised Beam Theory for curved members

In this work, a novel Generalised Beam Theory (GBT) formulation is developed, implemented and validated, aiming at analysing the linear behaviour of pre-curved or twisted beams with deformable thin-walled cross-section. Initially, the formulation is developed for arbitrary curvature, and subsequently simplified assuming that the curvature is constant, with either bending or twisting components. The case of bending curvature is explored in detail. The fundamental equations are derived introducing the usual GBT kinematic assumptions (Kirchhoff, Vlasov and transverse inextensibility of the walls), which make it possible to reduce the number of degrees of freedom without loss of accuracy of the solution. It is shown that the resulting equations (i) correspond to those of the Winkler-Bach classic theory (for the in-plane case), (ii) are similar to those of the Vlasov theory (for out-of-plane bending and torsion) and (iii) are identical to those of the finite strip method (although with a slight difference in one of the terms of the bending shear strain). Furthermore, it is shown that the curvature of the bar significantly influences the equations for the determination of the cross-section deformation modes. On the basis of the formulation developed, through the direct approximation of the mode amplitude functions, a beam finite element is obtained and implemented. Several examples are presented, illustrating the potential of the proposed finite element. For validation and comparison purposes, results obtained using the classic theories (Winkler-Bach and Vlasov — in the latter case a special finite element is also developed) and shell finite element models are provided.

Keywords:

- Generalised Beam Theory (GBT)
- Curved beams
- Thin-walled beams
- Cross-section deformation

Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
1 Introdução	1
1.1 Motivação e objetivos	1
1.2 Organização	2
1.3 Notação	2
1.4 Fundamentos da GBT para vigas retas	3
1.4.1 Introdução	3
1.4.2 Equações Fundamentais	4
1.4.3 Formulação de elementos finitos	9
2 Formulação linear da GBT para vigas curvas	13
2.1 Introdução	13
2.2 Relações cinemáticas para peças curvas	13
2.2.1 Curvatura arbitrária	13
2.2.2 Curvatura de flexão constante	19
2.2.3 Curvatura de torção constante	20
2.3 Equilíbrio	21
2.4 Descrição cinemática da GBT	22
2.4.1 Curvatura de flexão constante — modelo simplificado	23
2.4.2 Curvatura de flexão constante — modelo refinado	25
2.4.3 Comparação com a solução do Método das Faixas Finitas	26
2.4.4 Curvatura de torção constante	28
2.5 Formulação de um elemento finito	29
2.6 Detalhes da implementação	31

Índice de Matérias

2.6.1	Programa principal	31
2.6.2	Representação gráfica	34
3	Aplicações	37
3.1	Introdução	37
3.2	Esforço axial e flexão no plano da figura	37
3.2.1	Secção retangular de parede fina — comparação com a Teoria clássica	37
3.2.2	Exemplo 1 — secção retangular de parede fina	42
3.2.3	Exemplo 2 — secção em I solicitada segundo o eixo forte	45
3.2.4	Exemplo 3 — secção em I solicitada segundo o eixo fraco	47
3.3	Torção e flexão fora do plano da figura	49
3.3.1	A Teoria de Vlasov	49
3.3.2	Secção retangular de parede fina — comparação com a teoria de Vlasov	49
3.3.3	Exemplo 4 — secção retangular de parede fina	55
3.3.4	Exemplo 5 — secção em I solicitada segundo o eixo fraco	57
3.3.5	Exemplo 6 — secção em I solicitada segundo o eixo forte	59
3.4	Distorção	61
3.4.1	Exemplo 7 — secção com distorção	61
4	Conclusões e desenvolvimentos futuros	67
4.1	Conclusões	67
4.2	Desenvolvimentos futuros	67
	Bibliografia	69
A	Cálculos auxiliares	71
A.1	Cálculo de integrais	71
A.2	Deslocamento vertical da Teoria de Winkler-Bach	71
B	Elemento finito de Vlasov	75
B.1	Formulação do elemento finito	75
B.2	Integração da matriz de rigidez	77
C	Rotinas	79
C.1	Rotina <i>principal</i>	79
C.2	Rotina <i>auxiliares</i>	83
C.3	Rotina <i>CalcularKt</i>	86
C.4	Rotina <i>figura</i>	86
C.5	Rotina <i>auxiliar</i>	87

Índice de Figuras

1.1	Gateshead Millenium Bridge.	1
1.2	Modos de deformação de uma secção arbitrária (obtidos com o programa GBTUL).	4
1.3	Secção arbitrária de parede fina com eixos locais em cada parede (extraído de Gonçalves e Camotim, 2011).	5
1.4	Ilustração da hipótese de Kirchhoff, com $w_{,x} > 0$	6
1.5	Funções de interpolação de Hermite.	10
1.6	Funções de interpolação de Lagrange.	10
2.1	Configurações de referência, inicial e atual de uma peça linear com secção transversal arbitrária	14
2.2	Secção transversal arbitrária, visualizada nas posições de referência, inicial e atual.	16
2.3	Grandezas envolvidas nas equações do Método das Faixas Finitas.	27
2.4	Numeração dos pontos de integração para um elemento finito cuja secção transversal é constituída por três paredes, admitindo 3 pontos segundo x e 2 pontos segundo y e z	32
2.5	Montagem da matriz de rigidez global \mathbf{K} e do vetor global das forças exteriores \mathbf{Q} a partir das matrizes e vetores elementares, para uma discretização com dois elementos finitos (adaptado de Henriques, 2014).	33
2.6	Ordenação correta (à esquerda) e incorreta (à direita) da matriz $Faces$	34
3.1	Consola a 90° e raio R	37
3.2	Componente \bar{u}_k para os modos de deformação axial e de flexão, para a secção retangular de parede fina ($K_z \neq 0$).	38
3.3	Exemplo 1: barra curva com secção retangular de parede fina.	42
3.4	Exemplo 1: modos de deformação.	42
3.5	Exemplo 1: evolução do deslocamento vertical com o número de elementos finitos da GBT utilizados (δ^{WB} representa a solução da teoria de Winkler-Bach).	43
3.6	Exemplo 1: configurações deformadas obtidas com a GBT e modelos de elementos finitos convencionais de 4 nós, para $R/h = 10, 100$. No caso da GBT, para $R/h = 10$, apresentam-se as distribuições de tensões σ_{xx}	44
3.7	Exemplo 2: barra curva com secção em I solicitada à flexão segundo o eixo forte.	45

Índice de Figuras

3.8	Resultados do exemplo 2.	46
3.9	Exemplo 3: barra curva com secção em I solicitada à flexão em torno do eixo de menor inércia.	47
3.10	Resultados do exemplo 3.	48
3.11	Exemplo 4: barra curva com secção retangular de parede fina.	50
3.12	Modos de deformação.	50
3.13	Configurações deformadas obtidas com a GBT e um modelo de elementos finitos de casca (fator de escala = 0.1). No caso da GBT, apresentam-se as distribuições de tensões σ_{xx}	56
3.14	Exemplo 4: evolução do deslocamento horizontal com o número de elementos finitos utilizados.	56
3.15	Exemplo 5: barra curva com secção em I solicitada à flexão segundo o eixo fraco.	57
3.16	Exemplo 5: evolução do deslocamento horizontal com o número de elementos finitos utilizados.	58
3.17	Resultados do exemplo 5.	59
3.18	Exemplo 6: barra curva com secção em I solicitada à flexão segundo o eixo forte.	60
3.19	Exemplo 6: evolução do deslocamento horizontal com o número de elementos finitos utilizados.	60
3.20	Resultados do exemplo 6.	61
3.21	Exemplo 7: barra curva com secção poligonal aberta solicitada à flexão.	62
3.22	Representação da secção transversal como um pórtico sujeito a assentamentos de apoio.	63
3.23	Modos de deformação.	64
3.24	Resultados do exemplo 7.	66
A.1	Elemento curvo.	72

Índice de Tabelas

3.1	Exemplo 1: deslocamento vertical.	44
3.2	Exemplo 2: deslocamento vertical.	46
3.3	Exemplo 3: deslocamento vertical.	47
3.4	Exemplo 4: deslocamento horizontal.	57
3.5	Exemplo 5: deslocamento horizontal.	58
3.6	Exemplo 6: deslocamento horizontal.	61
3.7	Exemplo 7: deslocamento vertical.	65
3.8	Exemplo 7: contribuição dos modos de deformação.	65

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Abreviaturas e siglas

GBT *Generalised Beam Theory* (Teoria Generalizada de Vigas)

MFF Método das Faixas Finitas

Índices

$()^M$ parcela de membrana

$()^F$ parcela de flexão

$()^{Pi}$ relativo à parede i

$()^t$ transposição de vetor ou matriz

$()_{,i}$ derivada parcial em ordem a i

$\delta()$ variação virtual

$P()$ primitiva

Letras Latinas Maiúsculas

A superfície média da barra

C operador constitutivo para o caso elástico

\hat{D} gradiente de deslocamentos entre as configurações inicial e atual

E módulo de elasticidade

E_i versor do eixo i

F gradiente de deformação entre as configurações de referência e atual

F_0 gradiente de deformação entre as configurações de referência e inicial

F_j função de interpolação de Lagrange j

\hat{F} gradiente de deformação entre as configurações de inicial e atual

G módulo de distorção

H_k função de interpolação de Hermite k

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

- I momento de inércia segundo o eixo de flexão relevante
- I_R momento de inércia, considerando o efeito da curvatura
- I_w constante de empenamento para a torção
- J fator de rigidez à torção
- J_0 variação de volume entre as configurações inicial e de referência; jacobiano do gradiente de deformação \mathbf{F}_0
- \mathbf{K} matriz de rigidez; vetor de curvatura da parede
- K_i curvatura em torno do eixo i
- \mathbf{L} vetor posição dos pontos da parede, relativamente ao respetivo ponto de referência
- \mathbf{L}_A vetor posição do ponto de referência de cada parede, relativamente ao referencial local da secção
- M momento fletor
- N esforço axial; número de modos de deformação
- N_w número de modos de empenamento
- R raio de curvatura
- \mathbf{R} matriz de rotação das paredes da secção transversal
- \mathbf{Q} vetor das forças exteriores
- \mathbf{U} campo de deslocamentos da parede
- \mathcal{U} energia de deformação elástica
- V volume da barra na configuração de referência
- V_0 volume da barra na configuração inicial
- W_{ext} trabalho das forças exteriores
- W_{int} trabalho das forças interiores
- \mathbf{X} vetor da posição da configuração de referência

Letras Latinas Minúsculas

- b largura da parede; largura do banzo do perfil de aço
- \mathbf{d} vetor dos valores nodais das funções de amplitude e das suas derivadas
- h altura da alma do perfil de aço
- l comprimento do elemento finito
- n_e número de elementos finitos

- r vetor posição do eixo da peça
- t espessura da parede do perfil de aço
- u componente do deslocamento do plano médio da parede segundo x
- \mathbf{u} vetor deslocamento entre as configurações de referência e atual
- \mathbf{u}_0 vetor deslocamento entre as configurações de referência e inicial
- \bar{u}_k deslocamento u relativo ao modo de deformação k
- $\hat{\mathbf{u}}$ vetor deslocamento entre as configurações inicial e atual
- v componente do deslocamento do plano médio da parede segundo y
- \bar{v}_k deslocamento v relativo ao modo de deformação k
- w componente do deslocamento do plano médio da parede segundo z
- \bar{w}_k deslocamento w relativo ao modo de deformação k
- x eixo paralelo ao eixo da viga
- \mathbf{x} vetor posição da configuração atual
- \mathbf{x}_0 vetor posição da configuração inicial
- y eixo contido na secção transversal e coincidente com a linha média da parede
- z eixo contido na secção transversal e perpendicular à linha média da parede

Letras Gregas

- β inverso de J_0
- δ variação virtual
- γ distorção
- ε extensão
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ tensor das deformações infinitesimais
- ν coeficiente de Poisson
- σ tensão
- $\boldsymbol{\sigma}$ tensor das tensões
- ϕ_k função de amplitude do modo de deformação k
- Γ_A medida de deformação associada ao ponto A
- $\mathbf{\Lambda}$ matriz de rotação da secção transversal
- $\boldsymbol{\Xi}_U$ matriz auxiliar para a definição de \mathbf{U}

Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

Ξ_ε matriz auxiliar para a definição de ε

Ψ matriz que contém as funções de interpolação

Ω secção transversal

Ω vetor da curvatura da peça

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação e objetivos

O estudo de peças lineares de eixo curvo tem uma vasta aplicação no âmbito da Engenharia Civil, como por exemplo em pontes, passadiços metálicos, coberturas reticuladas de grande vão, entre outros exemplos (ver Figura 1.1¹). Frequentemente, essas peças são constituídas por barras de parede fina, sendo altamente suscetíveis à ocorrência de deformação da secção transversal no seu plano e para fora deste (empenamento). A modelação numérica deste tipo de fenómenos é habitualmente feita com recurso a elementos finitos de casca ou faixas finitas (ver, por exemplo, Cheung et al., 1996), com modelos que envolvem um número significativo de graus de liberdade e geram uma grande quantidade de resultados, de difícil interpretação estrutural.



Figura 1.1: Gateshead Millenium Bridge.

Em alternativa aos métodos supracitados, pode utilizar-se uma teoria de barras que considere a deformação da secção, como é o caso da Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT, da designação em língua inglesa, *Generalised Beam Theory*). A GBT foi inicialmente desenvolvida por Richard Schardt e colaboradores (Schardt, 1989 — uma lista detalhada do trabalho publicado está disponível em www.vtb.info), tendo sido posteriormente desenvolvida por vários outros investigadores, onde se destacam Davies (ver, por exemplo, Davies e Leach, 1994;

¹Fonte: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gateshead_Millennium_Bridge,_30_November_2008_\(3\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gateshead_Millennium_Bridge,_30_November_2008_(3).jpg). Consultado em 23 de setembro de 2015.

Davies et al., 1994) e Camotim e colaboradores, cuja lista completa e atualizada de publicações pode ser consultada em www.civil.ist.utl.pt/gbt. A GBT tem vindo a afirmar-se como uma ferramenta de análise estrutural extremamente (i) *clarificadora*, devido ao facto de utilizar uma descrição cinemática baseada em “modos de deformação” da secção transversal, o que permite interpretar mais facilmente os resultados, e (ii) *eficiente e versátil*, dado que permite incluir/excluir efeitos específicos de uma forma muito simples. Em acréscimo, a GBT conduz muitas vezes a soluções analíticas ou semi-analíticas, as quais permitem extrair conclusões únicas e detalhadas acerca do comportamento estrutural de barras de parede fina.

A GBT tem sido exclusivamente desenvolvida e aplicada a barras de eixo reto, sendo os objetivos fundamentais deste trabalho desenvolver, implementar (pelo método dos elementos finitos) e validar uma formulação original da GBT para barras de eixo curvo e secção deformável, considerando no entanto apenas o caso geometricamente e fisicamente linear. Muito embora a formulação seja inicialmente desenvolvida para curvatura arbitrária, é quase imediatamente particularizada ao caso de curvatura constante de flexão ou de torção (separadamente). No entanto, apenas o caso da curvatura de flexão é explorado em detalhe e implementado, dado que tem maior interesse prático. Neste caso, as equações fundamentais são obtidas introduzindo as hipóteses cinemáticas usuais da GBT, as quais permitem reduzir o número de graus de liberdade do problema sem perda de precisão da solução. Em nota final, salienta-se que se espera que o trabalho desenvolvido contribua significativamente para o alargamento do domínio de aplicação da GBT.

1.2 Organização

A Dissertação desenvolve-se ao longo de quatro Capítulos, sendo o primeiro a presente Introdução, onde se apresentam a motivação e objetivos, os fundamentos da GBT para vigas retas e o respetivo elemento finito.

No segundo Capítulo apresenta-se a formulação desenvolvida para vigas curvas, particularizando para o caso da curvatura de flexão (apresentam-se dois modelos, um simplificado e um refinado) e para o caso da curvatura de torção, introduzindo as hipóteses simplificativas habituais da GBT. No caso da curvatura de flexão, mostra-se que a formulação desenvolvida coincide com a do método das faixas finitas (a menos de um termo). Apresentam-se ainda as equações fundamentais necessárias à implementação de um elemento finito de barra e descrevem-se os principais detalhes da implementação numérica efetuada.

O terceiro Capítulo encontra-se dividido em quatro secções. Em primeiro lugar, apresentam-se exemplos numéricos relativos ao caso plano (secção retangular, em I e em H) e mostra-se que a formulação proposta coincide com a teoria clássica de Winkler-Bach. Na secção seguinte estuda-se o caso da flexão para fora do plano e torção. Em particular, compara-se a formulação desenvolvida com a teoria clássica de Vlasov e apresentam-se três exemplos numéricos (secção retangular, secção em I e em H). Finalmente, na última secção, apresentam-se exemplos que envolvem a distorção da secção (deformação da secção no próprio plano com empenamento).

No quarto e último Capítulo apresentam-se as conclusões do trabalho efetuado e os desenvolvimentos futuros.

1.3 Notação

De modo a facilitar a leitura do texto, estabelece-se desde já a notação utilizada na representação das diversas grandezas e das operações entre estas.

As grandezas vectoriais e tensoriais de 2ª ordem, bem como as matrizes, representam-se em *negrito itálico*. As grandezas escalares e as componentes de matrizes e vetores indicam-se por letras em *itálico*.

Relativamente às operações entre dois vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} , os produtos interno e externo usuais são representados, respetivamente, por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. O produto tensorial representa-se por $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ e satisfaz, para um terceiro vetor \mathbf{w} arbitrário,

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u}. \quad (1.1)$$

Em termos matriciais, as componentes do tensor de 2ª ordem $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ são dadas por $u_i v_j$.

Relativamente às operações entre dois tensores de 2ª ordem \mathbf{A} e \mathbf{B} , há apenas a referir que o produto interno é dado por $\mathbf{A} : \mathbf{B}$, com

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}. \quad (1.2)$$

Dado um tensor \mathbf{A} , a sua transposta é \mathbf{A}^t e a sua inversa é \mathbf{A}^{-1} , satisfazendo

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}^t)\mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad [A^t]_{ij} = [A]_{ji}, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1}, \quad (1.4)$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade.

Refira-se ainda que (i) a derivação representa-se através de uma vírgula em índice inferior, seguida da variável em relação à qual se está a derivar (e.g., se $u = u(x, y, z)$, então $u_{,x} = \partial u / \partial x$), (ii) as grandezas associadas ao comportamento de membrana (não variando na espessura da parede) e flexão (nulas na linha média da parede e variando na espessura) assinalam-se em índice superior, respetivamente, pelas letras M e F , e (iii) no contexto da equação do princípio dos trabalhos virtuais, uma variação virtual de uma grandeza \mathbf{a} ou a é indicada por $\delta \mathbf{a}$ ou δa , respetivamente.

1.4 Fundamentos da GBT para vigas retas

1.4.1 Introdução

Nesta secção são apresentados os aspetos fundamentais que constituem a base da formulação clássica da GBT, de modo a que o leitor consiga mais facilmente identificar as diferenças entre as formulações do caso reto e do caso curvo.

Conforme foi já referido, a GBT é uma teoria para barras prismáticas com secção transversal de parede fina que apresenta a vantagem de permitir contabilizar a deformação da secção transversal no seu próprio plano e para fora deste (empenamento). Na GBT, a descrição cinemática da viga é baseada em modos de deformação da secção transversal, cujas amplitudes ao longo do eixo da barra constituem as incógnitas do problema. Os primeiros quatro modos correspondem aos modos clássicos da teoria das peças lineares (extensão axial, duas flexões em torno dos eixos centrais principais de inércia e torção em torno do centro de corte) e os restantes modos contabilizam a deformação da secção, no seu plano e de empenamento.

Devido ao carácter modal da GBT, é possível identificar algumas vantagens significativas relativamente aos métodos clássicos de análise de barras de parede fina (e.g. o método das faixas finitas e o método dos elementos finitos de casca), nomeadamente: (i) a introdução

de hipóteses simplificativas relativamente aos campos de tensões e/ou deformações permite reduzir o número de graus de liberdade (modos de deformação), sem afetar a precisão da solução, e (ii) a importância relativa dos vários modos de deformação pode ser obtida através da análise da participação modal na solução do problema. A título de exemplo, apresentam-se na Figura 1.2 os primeiros seis modos de deformação de uma secção transversal em C com reforços (*lipped channel* na designação em língua inglesa). Conforme se pode observar, os primeiros modos de deformação correspondem aos modos clássicos da teoria das peças lineares e os restantes dois modos são designados de “distorcionais” porque envolvem flexão no plano da secção, com deslocamentos dos vértices, e empenamento. Refira-se que estes modos foram calculados automaticamente com o programa GBTUL, que pode ser obtido em <http://www.civil.ist.utl.pt/gbt/>.

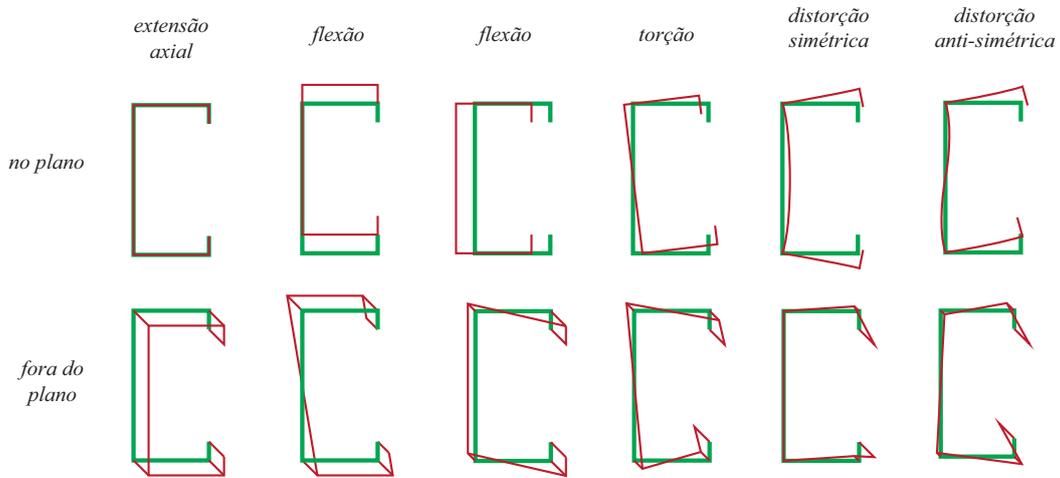


Figura 1.2: Modos de deformação de uma secção arbitrária (obtidos com o programa GBTUL).

1.4.2 Equações Fundamentais

Utilizando a notação da GBT adotada por Gonçalves et al. (2010), o campo de deslocamentos de cada parede da secção transversal é dado pelo vetor

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

onde U_x , U_y e U_z representam as componentes do deslocamento segundo cada um dos eixos locais da parede, (x, y, z) , os quais se indicam na Figura 1.3.

Considerando a hipótese dos pequenos deslocamentos (o que implica pequenas deformações), as componentes do tensor de deformação são dadas por

$$\varepsilon_{xx} = U_{x,x}, \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_{yy} = U_{y,y}, \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z}, \quad (1.8)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = U_{x,y} + U_{y,x}, \quad (1.9)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = U_{x,z} + U_{z,x}, \quad (1.10)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = U_{y,z} + U_{z,y}, \quad (1.11)$$

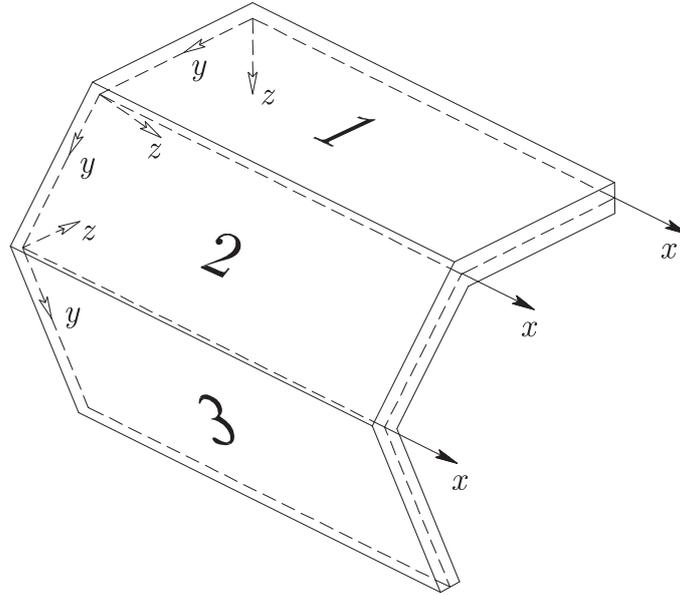


Figura 1.3: Seção arbitrária de parede fina com eixos locais em cada parede (extraído de Gonçalves e Camotim, 2011).

ou, representando-as numa forma matricial,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Introduzindo a hipótese de Kirchhoff, que corresponde a admitir que as fibras normais ao plano médio da parede permanecem indeformáveis e perpendiculares a este plano após deformação, o que é aceitável se a espessura das paredes for reduzida (como é o caso dos problemas analisados com a GBT), tem-se

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (1.13)$$

permitindo escrever o tensor de deformação numa forma mais concisa. Adotando uma representação vetorial (notação de Voigt), tem-se assim

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Em virtude da hipótese de Kirchhoff, tal como mostra a Figura 1.4, o deslocamento de um ponto genérico P pode ser escrito em função apenas do deslocamento do plano médio da respetiva parede. Assim, de acordo com a figura, sendo u e w as componentes do deslocamento do plano médio da parede segundo x e z , respetivamente, o deslocamento do ponto P , situado à cota z , escreve-se como

$$U_x^P = u - zw_{,x}, \quad (1.15)$$

$$U_z^P = w. \quad (1.16)$$

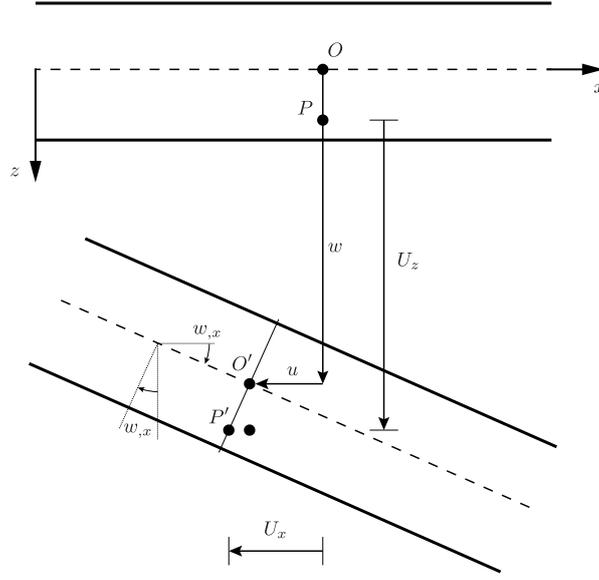


Figura 1.4: Ilustração da hipótese de Kirchhoff, com $w_{,x} > 0$.

Para o plano perpendicular, designando por v a componente do deslocamento do plano médio da parede segundo y , é possível escrever, a partir de relações análogas,

$$U_y^P = v - zw_{,y}. \quad (1.17)$$

Deste modo, o campo de deslocamentos (1.5) pode ser escrito exclusivamente a partir dos deslocamentos do plano médio, ou seja,

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u - zw_{,x} \\ v - zw_{,y} \\ w \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Note-se que este vetor pode ser decomposto numa parcela de membrana $[u \ v \ w]^t$ e numa parcela de flexão $[-zw_{,x} \ -zw_{,y} \ 0]^t$.

Na descrição cinemática da GBT, o campo de deslocamentos define-se como uma combinação linear de modos de deformação da secção transversal, cada um multiplicado pela função que define a sua amplitude ao longo do eixo da barra. Conforme foi já referido, as funções de amplitude constituem as únicas incógnitas do problema. Assim, começa-se por escrever os deslocamentos do plano médio de cada parede (u , v e w) através das seguintes combinações lineares

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) = \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.19)$$

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{v}_k(y) \phi_k(x) = \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\phi}, \quad (1.20)$$

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^N \bar{w}_k(y) \psi_k(x) = \bar{\mathbf{w}}^t \boldsymbol{\psi}, \quad (1.21)$$

onde \bar{u}_k , \bar{v}_k e \bar{w}_k , funções de y , representam as componentes do modo de deformação k segundo os eixos locais x , y , z , respetivamente, e φ_k , ϕ_k e ψ_k são as respetivas funções de amplitude, dependentes apenas de x . Todas as formas vectoriais das entidades apresentadas são vetores-coluna com dimensão igual o número de modos de deformação, N .

A determinação das funções \bar{u}_k , \bar{v}_k e \bar{w}_k não será abordada em detalhe neste trabalho, referindo-se apenas no Capítulo 3 como foram determinadas as utilizadas nos casos particulares estudados. No entanto, para peças retas, os modos de deformação podem ser facilmente obtidos através do programa GBTUL, já mencionado anteriormente.

Nas aplicações da GBT, é comum admitir como válida a hipótese de Vlasov, i.e., admitir que as distorções de membrana (no plano médio da parede) são nulas, ou seja, ($\gamma_{xy}^M = 0$). Esta hipótese é essencialmente admissível para secções abertas, dado que o comportamento de secções fechadas à torção envolve $\gamma_{xy}^M \neq 0$ (ver, por exemplo, Murray, 1986). Com as expressões anteriores, a distorção de membrana é dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^M &= u_{,y} + v_{,x} \\ &= \left(\sum_{k=1}^N \bar{u}_k(y) \varphi_k(x) \right)_{,y} + \left(\sum_{k=1}^N \bar{v}_k(y) \phi_k(x) \right)_{,x} \\ &= \sum_{k=1}^N \bar{u}_{k,y}(y) \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^N \bar{v}_k(y) \phi_{k,x}(x). \end{aligned} \quad (1.22)$$

e, para que se anule, é necessário que se verifique simultaneamente

$$\bar{u}_{k,y}(y) = -\bar{v}_k(y), \quad (1.23)$$

$$\varphi_k(x) = \phi_{k,x}(x), \quad (1.24)$$

ou seja, deve existir uma relação entre as componentes \bar{u} e \bar{v} de cada modo e entre as respetivas funções de amplitude.

Note-se que, numa secção transversal genérica, a existência de deslocamentos \bar{v} numa parede não pode ocorrer sem que se produzam deslocamentos \bar{w} em várias paredes da secção, de modo a respeitar as condições de compatibilidade. Assim, as funções de amplitude destas duas componentes devem respeitar

$$\phi_k(x) = \psi_k(x). \quad (1.25)$$

Tem-se então que as Eqs. (1.19)–(1.21) podem escrever-se utilizando apenas as funções de amplitude ϕ_k , resultando

$$u(x, y) = \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\phi}_{,x}, \quad (1.26)$$

$$v(x, y) = \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\phi}, \quad (1.27)$$

$$w(x, y) = \bar{\mathbf{w}}^t \boldsymbol{\phi}. \quad (1.28)$$

De modo a facilitar a implementação numérica e a escrita das equações seguintes, adota-se a notação matricial introduzida por Gonçalves e Camotim (2011), segundo a qual se escreve

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \boldsymbol{\Xi}_U(y, z) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(x) \\ \boldsymbol{\phi}_{,x}(x) \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_U(y, z) = \boldsymbol{\Xi}_U^M(y) + z \boldsymbol{\Xi}_U^F(y), \quad (1.30)$$

onde as matrizes Ξ_U^M e Ξ_U^F correspondem às componentes de membrana e flexão, respetivamente, e definem-se como

$$\Xi_U^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^t(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Xi_U^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{w}}^t_{,y}(y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.31)$$

Para as deformações, tem-se

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}^M + \boldsymbol{\varepsilon}^F = \Xi_\varepsilon(y, z) \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \\ \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}, \quad (1.32)$$

$$\Xi_\varepsilon(y, z) = \Xi_\varepsilon^M(y) + z\Xi_\varepsilon^F(y), \quad (1.33)$$

onde as matrizes Ξ_ε^M e Ξ_ε^F são dadas por

$$\Xi_\varepsilon^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t_{,y}(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (\bar{\mathbf{u}}_{,y}(y) + \bar{\mathbf{v}}(y))^t & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.34)$$

$$\Xi_\varepsilon^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{w}}^t_{,yy}(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\bar{\mathbf{w}}^t_{,y}(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

As matrizes anteriores definem um estado plano de deformação (aliás, recorde-se que, da hipótese de Kirchhoff, se tem $\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$). Na GBT, admite-se em geral que as paredes estão sujeitas a um estado plano de tensão, o que é inconsistente com o estado plano de deformação quando $\nu \neq 0$. Assim, $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ e o tensor das tensões pode ser escrito na forma vetorial

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Para materiais elásticos lineares, as relações constitutivas são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (1.37)$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva para estados planos de tensão, dada por

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

onde E e ν representam, respetivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson.

Refira-se ainda que, no contexto da GBT, é comum admitir-se que $\varepsilon_{yy}^M = 0$ e $\sigma_{yy}^M = 0$, o que permite dispensar a consideração de modos que envolvam a variação de comprimento da linha média das paredes (no plano da secção transversal) e simplificar a relação constitutiva. Esta opção conduz a uma economia em termos de modos de deformação (e, portanto, de graus de liberdade) sem perda significativa de precisão da solução na grade maioria dos casos.

Nesta situação, a relação de estados planos de tensão é utilizada apenas para os termos de flexão e, para os termos de membrana, usa-se antes

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}, \quad (1.39)$$

onde G representa o módulo de distorção.

Considerando um carregamento constituído por forças distribuídas $\bar{\mathbf{f}}^t = [\bar{f}_x \ \bar{f}_y \ \bar{f}_z]$, aplicado na superfície média das paredes apenas (por uma questão de simplificação), o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) fornece as equações de equilíbrio

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV + \int_A \delta \mathbf{U}^t \bar{\mathbf{f}} dA = 0, \quad (1.40)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ correspondem a formas vectoriais, e V e A representam o volume e a superfície média da barra, respetivamente. Tendo em conta as Eqs. (1.29), (1.32) e (1.37), as equações de equilíbrio podem ser escritas como

$$- \int_V \begin{bmatrix} \delta \phi(x) \\ \delta \phi_{,x}(x) \\ \delta \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}^t \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon^t(y) \mathbf{C} \boldsymbol{\Xi}_\varepsilon(y) \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \\ \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix} dV + \int_A \begin{bmatrix} \delta \phi(x) \\ \delta \phi_{,x}(x) \end{bmatrix}^t (\boldsymbol{\Xi}_U^M(y))^t \bar{\mathbf{f}} dA = 0. \quad (1.41)$$

1.4.3 Formulação de elementos finitos

As equações do PTV da Secção anterior constituem uma base para desenvolver elementos finitos de barra baseados na GBT. Nesta Secção apresenta-se o elemento finito obtido por Gonçalves e Camotim (2011, 2012), o qual se obtém através da interpolação das funções de amplitude ϕ_k na seguinte forma

$$\boldsymbol{\phi}(x) = \boldsymbol{\Psi}(x) \mathbf{d}, \quad (1.42)$$

onde o vetor-coluna $\boldsymbol{\phi}$ já foi introduzido na Secção anterior, a matriz $\boldsymbol{\Psi}$ contém as funções de interpolação e o vetor \mathbf{d} contém os valores nodais das funções de amplitude e das suas derivadas, ou seja, as incógnitas do problema.

A satisfação das condições de compatibilidade requer a utilização de funções de interpolação de classe C^1 para os modos que envolvam deslocamentos $\bar{w} \neq 0$. De facto, como se utiliza a hipótese de Kirchhoff para descrever a configuração das paredes fora do seu plano médio, a utilização de funções C^0 conduziria a separações/interpenetrações. O mesmo se passa em virtude da hipótese de Vlasov (para os modos que envolvam deslocamentos $\bar{v}_k = -\bar{u}_{k,y} \neq 0$) e, aliás, note-se que as parcelas de membrana e flexão do campo de deslocamento dependem de ϕ'_k através de \bar{u} e \bar{w} (recordar (1.29) e a composição das respetivas matrizes auxiliares). Assim, para estes modos, utilizam-se funções de interpolação cúbicas de Hermite, as quais são definidas por

$$H_1 = 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 1, \quad (1.43)$$

$$H_2 = l \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right), \quad (1.44)$$

$$H_3 = -2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2, \quad (1.45)$$

$$H_4 = l \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right), \quad (1.46)$$

onde l representa o comprimento do elemento finito. Na Figura 1.5 estão representadas estas funções. Assim, a função de amplitude do modo k é aproximada por

$$\phi_k(x) = H_1\phi_k(0) + H_2\phi_{k,x}(0) + H_3\phi_k(l) + H_4\phi_{k,x}(l). \quad (1.47)$$

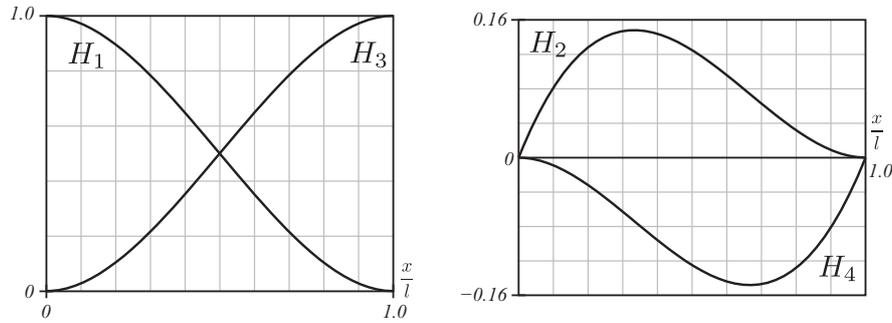


Figura 1.5: Funções de interpolação de Hermite.

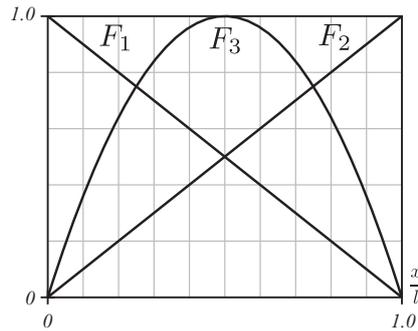


Figura 1.6: Funções de interpolação de Lagrange.

Para os modos que apresentem apenas deslocamentos axiais ($\bar{u}_k \neq 0$, $\bar{v}_k = \bar{w}_k = 0$), designados de “modos de empenamento”, apenas a parcela de membrana é não-nula, sendo *exclusivamente* obtida a partir da primeira derivada de ϕ_k (ou seja, nenhuma componente de deslocamento depende de ϕ_k — recordar (1.29)). Assim, apesar de ser necessário garantir a continuidade da primeira derivada, é talvez mais claro aproximar diretamente ϕ'_k , dado que para estes modos ϕ_k não é de todo utilizado. Acresce referir que existe uma dependência linear $H_{1,x} = -H_{3,x}$, a qual inviabiliza a utilização destas funções. De modo a contornar o problema, as primeiras derivadas ϕ'_k das funções de amplitude dos modos de empenamento são aproximadas pelas funções de Lagrange

$$F_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad (1.48)$$

$$F_2 = \frac{x}{l}, \quad (1.49)$$

$$F_3 = 4 \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right), \quad (1.50)$$

1.4. Fundamentos da GBT para vigas retas

cuja representação gráfica é fornecida na Figura 1.6 ². Assim a aproximação de $\phi_{k,x}(x)$ é dada por

$$\phi_{k,x}(x) = F_1\phi_{k,x}(0) + F_3\phi_{k,x}(l/2) + F_2\phi_{k,x}(l). \quad (1.51)$$

A utilização das funções de interpolação de Hermite e Lagrange define um elemento finito com três nós, onde o primeiro nó ($x = 0$) está relacionado com F_1 , H_1 e H_2 , o segundo nó ($x = l/2$) está associado a F_3 e o terceiro nó ($x = l$) relaciona-se com F_2 , H_3 e H_4 . Assim, considerando N modos de deformação, onde os primeiros N_w são modos de empenamento (a letra w provém de *warping*, que significa empenamento em língua inglesa), a matriz Ψ tem dimensão $N \times (4N - N_w)$ e organiza-se do seguinte modo:

$$\Psi = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} P(\tilde{F}_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P(\tilde{F}_3) & P(\tilde{F}_2) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{H}_1 & \tilde{H}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{H}_3 & \tilde{H}_4 \end{array} \right], \quad (1.52)$$

onde \tilde{A} representa uma matriz diagonal, de dimensões igual ao número de modos de deformação associados e que contém na sua diagonal principal a função A , e $P(A)$ representa a primitiva da função A em relação a x . Assim, o vetor-coluna \mathbf{d} tem dimensão $4N - N_w$ e é dado por

$$\mathbf{d} = \left[\begin{array}{c} \phi_{1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{N_w,x}(0) \\ \phi_{N_w+1}(0) \\ \vdots \\ \phi_N(0) \\ \phi_{N_w+1,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(0) \\ \phi_{1,x}(l/2) \\ \vdots \\ \phi_{N_w,x}(l/2) \\ \phi_{1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{N_w,x}(l) \\ \phi_{N_w+1}(l) \\ \vdots \\ \phi_N(l) \\ \phi_{N_w+1,x}(l) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(l) \end{array} \right]. \quad (1.53)$$

²Existe aqui um ligeiro abuso de linguagem, dado que a definição usual dos polinómios de Lagrange é empregue num contexto em que, para uma dada discretização, todas as funções possuem o mesmo grau. No caso em análise, duas funções são do 1º grau e apenas uma função é do 2º grau, o que não respeita portanto a definição. Contudo, note-se que as três funções definem uma base completa para polinómios do 2º grau, pelo que a sua utilização é admissível.

Tendo em conta (1.42), é possível escrever

$$\delta\phi = \Psi\delta\mathbf{d}, \quad (1.54)$$

$$\delta\phi_{,x} = \Psi_{,x}\delta\mathbf{d}, \quad (1.55)$$

$$\delta\phi_{,xx} = \Psi_{,xx}\delta\mathbf{d}, \quad (1.56)$$

e a expressão do trabalho virtual (1.41) fica

$$-\delta\mathbf{d}^t \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t \mathbf{C} \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV \mathbf{d} + \delta\mathbf{d}^t \int_A \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \bar{\mathbf{f}} dA = 0, \quad (1.57)$$

onde é possível identificar o vetor das forças exteriores \mathbf{Q} ,

$$\mathbf{Q} = \int_A \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t \bar{\mathbf{f}} dA \quad (1.58)$$

e a matriz de rigidez \mathbf{K} ,

$$\mathbf{K} = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t \mathbf{C} \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} dV. \quad (1.59)$$

Conforme se verá na Secção 2.5, as equações para barras de eixo curvo são mais complexas, mas o seu formato é bastante semelhante ao das apresentadas nesta Secção.

Capítulo 2

Formulação linear da GBT para vigas curvas

2.1 Introdução

Neste Capítulo é desenvolvida a formulação linear da GBT para vigas curvas, a qual constitui a principal contribuição original do trabalho efetuado. Na Secção 2.2 procede-se à obtenção das relações cinemáticas fundamentais para peças curvas, começando pelo caso geral de curvatura arbitrária e posteriormente particularizando para curvatura de flexão constante e curvatura de torção constante. A Secção 2.3 apresenta as equações de equilíbrio (PTV). De seguida introduz-se a descrição cinemática característica da GBT e as hipóteses simplificativas, o que permite condensar consideravelmente as equações. Para além disso, desenvolvem-se duas formulações da GBT, designadas de “simplificada” e “refinada”, e mostra-se que a formulação refinada é virtualmente idêntica à das faixas finitas para barras com curvatura de flexão constante. No final do Capítulo introduz-se o elemento finito utilizado, evidenciando as distinções com o elemento finito de Gonçalves e Camotim (2011) para vigas de eixo reto, e discutem-se aspetos relacionados com a sua implementação.

2.2 Relações cinemáticas para peças curvas

2.2.1 Curvatura arbitrária

No presente trabalho, a obtenção das relações cinemáticas para o caso das peças de eixo curvo é facilitada pela definição de três configurações distintas (ver Figura 2.1): (i) uma configuração de referência, fictícia, em que a peça é reta, (ii) a configuração inicial (curva), a partir da qual o carregamento é aplicado, e (iii) a configuração atual, assumida pela viga quando atua o carregamento. Em vez de estabelecer uma configuração de referência, poderiam utilizar-se coordenadas curvilíneas para descrever a configuração inicial da viga. No entanto, tal obrigaria a recorrer a um cálculo vetorial e tensorial mais complexo. Aliás, deve salientar-se que a metodologia seguida no presente trabalho não apresenta nenhum tipo de desvantagem face à abordagem com coordenadas curvilíneas.

A posição de um ponto arbitrário nas configurações de referência, inicial e atual é dada pelos vetores \mathbf{X} , \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} , respetivamente, conforme indicado na Figura 2.1. Note-se ainda que o ponto C representa a intersecção do eixo da peça com o plano da secção transversal, mas a localização de tal ponto na secção transversal é arbitrária. Tendo em conta os vetores posição

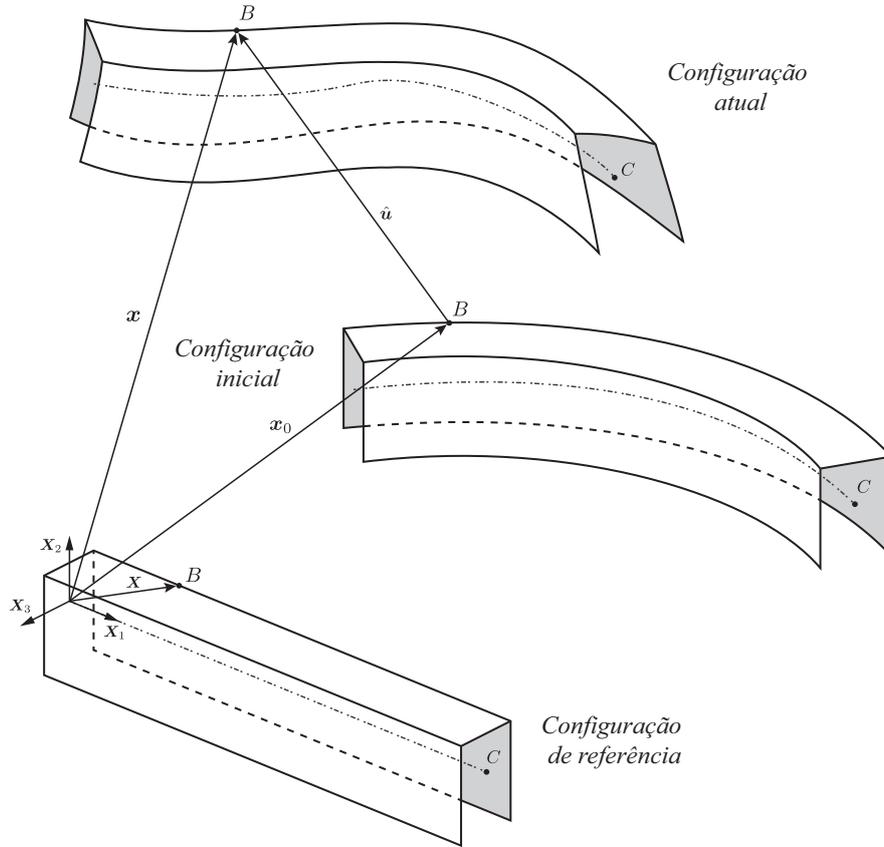


Figura 2.1: Configurações de referência, inicial e atual de uma peça linear com secção transversal arbitrária

definidos, os deslocamentos entre as três configurações são dados por

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}. \quad (2.3)$$

A deformação que ocorre entre as três configurações pode ser caracterizada através dos seguintes gradientes de deformação

$$d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F}_0 d\mathbf{X}, \quad (2.4)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (2.5)$$

$$d\mathbf{x} = \hat{\mathbf{F}} d\mathbf{x}_0, \quad (2.6)$$

onde \mathbf{F}_0 representa a transformação entre as configurações de referência e inicial, \mathbf{F} diz respeito à transformação entre as configurações de referência e atual e, finalmente, $\hat{\mathbf{F}}$ refere-se à transformação entre as configurações inicial e atual. Os três gradientes relacionam-se através de

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}_0} \frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{X}} \\ \mathbf{F} &= \hat{\mathbf{F}} \mathbf{F}_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.2. Relações cinemáticas para peças curvas

Antes de determinar as componentes de deformação, note-se que, tendo em conta (2.2), o gradiente de deformação entre as configurações inicial e atual pode ser decomposto da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{F}} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}_0} \\
 &= \frac{d(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{u}})}{d\mathbf{x}_0} \\
 &= \mathbf{1} + \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\mathbf{x}_0} \\
 &= \mathbf{1} + \hat{\mathbf{D}},
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade e $\hat{\mathbf{D}}$ é o gradiente de deslocamento entre as configurações inicial e atual. Assim, o tensor de deformação de Green-Lagrange, $\hat{\mathbf{E}}$ ¹, pode ser escrito por (Bonet e Wood, 1997)

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{F}}^t \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{1} + \hat{\mathbf{D}})^t (\mathbf{1} + \hat{\mathbf{D}}) - \mathbf{1} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{D}}^t + \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{D}}^t \hat{\mathbf{D}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Tendo em conta que o objetivo do presente trabalho é desenvolver uma teoria linear, podem desprezar-se os termos não-lineares da expressão anterior, o que conduz a

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{D}}^t + \hat{\mathbf{D}} \right) = \text{sim} \left(\hat{\mathbf{D}} \right). \tag{2.10}$$

onde $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é o tensor das deformações infinitesimais e $\text{sim} \left(\hat{\mathbf{D}} \right)$ designa a parte simétrica de $\hat{\mathbf{D}}$. Para tirar partido da utilização de uma configuração de referência, é necessário escrever o gradiente de deslocamento em termos de vetores elementares desta configuração, $d\mathbf{X}$. Das expressões (2.7), (2.8) e das relações dos deslocamentos entre configurações, obtém-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{1} + \hat{\mathbf{D}} &= \mathbf{F} \mathbf{F}_0^{-1} \\
 &= \frac{d(\mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{u}})}{d\mathbf{X}} \mathbf{F}_0^{-1} \\
 &= \left(\mathbf{F}_0 + \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\mathbf{X}} \right) \mathbf{F}_0^{-1} \\
 &= \mathbf{1} + \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\mathbf{X}} \mathbf{F}_0^{-1} \\
 \Rightarrow \hat{\mathbf{D}} &= \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\mathbf{X}} \mathbf{F}_0^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para desenvolver as expressões, torna-se agora necessário detalhar a descrição cinemática da viga. Na Figura 2.2 representam-se as três configurações de uma secção transversal genérica e as principais grandezas utilizadas para as descrever.

¹Note-se que se utilizou o $(\hat{\cdot})$ para frisar que este tensor está associado a $\hat{\mathbf{F}}$.

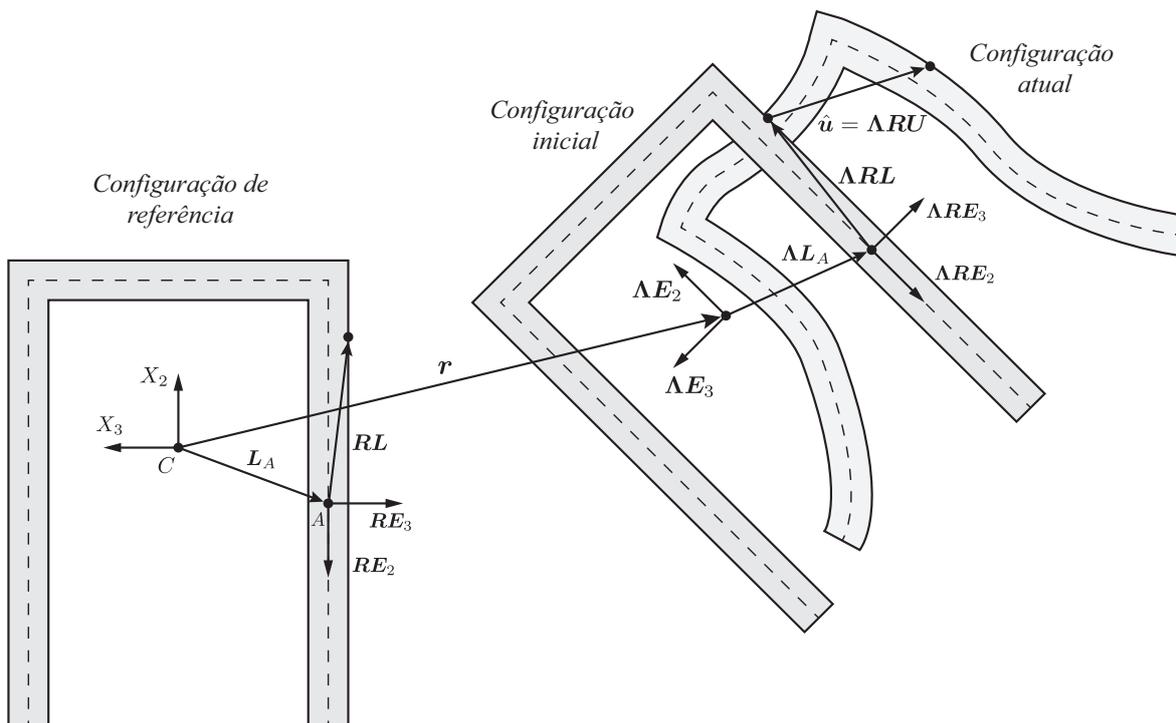


Figura 2.2: Seção transversal arbitrária, visualizada nas posições de referência, inicial e atual.

Considere-se em primeiro lugar a configuração de referência (ver Figura 2.2). Cada parede possui um ponto de referência, A , no qual se localiza a origem do respectivo referencial local, o qual sofre uma rotação, dada por \mathbf{R} ², relativamente ao referencial cuja origem é o ponto C . A posição do ponto A de cada parede, relativamente ao ponto C , é dada através do vetor \mathbf{L}_A . A posição de qualquer ponto da parede, relativamente ao ponto A , é dada pelo vetor rodado \mathbf{RL} , com $\mathbf{L} = X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3$.

A configuração inicial é obtida referenciando a posição do ponto C da seção transversal através do vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(X_1)$, seguindo-se uma rotação de corpo rígido da seção, por $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(X_1)$, que pode contudo variar ao longo do eixo da peça (segundo X_1), de modo a descrever a curvatura inicial. Tem-se assim

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{r} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{L}_A + \mathbf{RL}). \quad (2.12)$$

A configuração atual é obtida admitindo que ocorrem deslocamentos a partir da configuração inicial. Estes deslocamentos são dados pelo vetor $\mathbf{U}(\mathbf{X})$, o qual se alinha com o referencial de cada parede. Assim, os deslocamentos entre as configurações inicial e atual, $\hat{\mathbf{u}}$ relacionam-se com o vetor \mathbf{U} através da relação

$$\mathbf{U} = (\mathbf{\Lambda}\mathbf{R})^t \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.13)$$

²A rotação de um vetor no espaço tridimensional \mathbf{a} , em torno da origem, pode ser feita pré-multiplicando-o por uma *matriz de rotação* quadrada (ou tensor de rotação) \mathbf{R} , que é ortogonal ($\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}$) e satisfaz $\det(\mathbf{R}) = 1$. Assim, o vetor rodado é simplesmente dado por $\mathbf{R}\mathbf{a}$.

2.2. Relações cinemáticas para peças curvas

Tendo em conta as relações anteriores, pode escrever-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{u}} \\
 &= \mathbf{r} + \mathbf{\Lambda} (\mathbf{L}_A + \mathbf{R}\mathbf{L}) + \hat{\mathbf{u}} \\
 &= \mathbf{r} + \mathbf{\Lambda} (\mathbf{L}_A + \mathbf{R}(\mathbf{L} + \mathbf{U})).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}\mathbf{U}$, é possível agora desenvolver o termo $d\hat{\mathbf{u}}/d\mathbf{X}$ de (2.11) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\mathbf{X}} &= (\mathbf{\Lambda}\mathbf{R})'\mathbf{U} \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{\Lambda}\mathbf{R}\mathbf{D} \\
 &= \mathbf{\Lambda}\mathbf{R} \left(\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{U} \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{D} \right),
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

onde $(\cdot)' = d(\cdot)/dX_1$, $\widetilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{\Lambda}\mathbf{R})^t(\mathbf{\Lambda}\mathbf{R})'$ e $\mathbf{D} = d\mathbf{U}/d\mathbf{X}$, i.e., $D_{ij} = U_{i,j}$. É importante reconhecer que $\widetilde{\mathbf{K}}$ é uma matriz anti-simétrica³, sendo portanto da forma

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} 0 & -K_3 & K_2 \\ K_3 & 0 & -K_1 \\ -K_2 & K_1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.16}$$

Por outro lado, como $\widetilde{\mathbf{K}}$ é obtido a partir da derivada segundo X_1 dos tensores de rotação $(\mathbf{\Lambda}\mathbf{R})'$, representa a curvatura da parede entre as configurações de referência e inicial, medida num referencial que acompanha a parede (dado que se pré-multiplica pela rotação inversa $(\mathbf{\Lambda}\mathbf{R})^t$). Como se trata de uma matriz anti-simétrica, é possível definir o respetivo vetor axial, que se designa por \mathbf{K} e é dado por

$$\mathbf{K} = \text{axi}(\widetilde{\mathbf{K}}) = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

o que permite respeitar a condição

$$\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{a} = \mathbf{K} \times \mathbf{a}. \tag{2.18}$$

³Uma matriz \mathbf{A} diz-se anti-simétrica se $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t = 0$. No caso de $\widetilde{\mathbf{K}}$, esta propriedade é demonstrada da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathbf{K}} + \widetilde{\mathbf{K}}^t &= \mathbf{R}^t \left(\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}' + (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}')^t \right) \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{R}^t \left(\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}' + (\mathbf{\Lambda}')^t \mathbf{\Lambda} \right) \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{R}^t (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda})' \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{R}^t \mathbf{1}' \mathbf{R} \\
 &= \mathbf{0}.
 \end{aligned}$$

Com os resultados anteriores e (2.12), tem-se

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_0 &= \frac{d\mathbf{x}_0}{d\mathbf{X}} \\
 &= (\mathbf{r}' + \boldsymbol{\Lambda}'(\mathbf{L}_A + \mathbf{R}\mathbf{L})) \otimes \mathbf{E}_1 + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}(\mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3) \\
 &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R} \left(((\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})^t \mathbf{r}' + (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})^t \boldsymbol{\Lambda}'\mathbf{R}(\mathbf{R}^t\mathbf{L}_A + \mathbf{L})) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 \right) \\
 &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R} \left((\boldsymbol{\Gamma}_C + \widetilde{\mathbf{K}}(\mathbf{R}^t\mathbf{L}_A + \mathbf{L})) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} \right) \\
 &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R} \left((\boldsymbol{\Gamma}_C + \mathbf{K} \times (\mathbf{R}^t\mathbf{L}_A) + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} \right) \\
 &= \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R} \left((\boldsymbol{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} \right), \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

onde o vetor $\boldsymbol{\Gamma}_C = (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})^t \mathbf{r}' - \mathbf{E}_1$ quantifica a deformação do eixo da peça entre as configurações de referência e inicial ⁴ e o vetor $\boldsymbol{\Gamma}_A$ quantifica a deformação referida ao ponto A (entre as referidas configurações), sendo dado por

$$\boldsymbol{\Gamma}_A = \boldsymbol{\Gamma}_C + \mathbf{K} \times (\mathbf{R}^t\mathbf{L}_A). \tag{2.20}$$

Assim, das expressões (2.15) e (2.19), pode agora escrever-se (2.11) como

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{D}} &= \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{d\mathbf{X}} \mathbf{F}_0^{-1} \\
 &= (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}) \hat{\mathbf{D}}^R (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})^t, \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

com

$$\hat{\mathbf{D}}^R = \left(\widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{U} \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{D} \right) \left((\boldsymbol{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{L}) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} \right)^{-1}. \tag{2.22}$$

Note-se de (2.21) que $\hat{\mathbf{D}}^R$ corresponde à rotação da matriz $\hat{\mathbf{D}}$ por $(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})^t$ (a inversa da rotação $(\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})$). Finalmente, para facilitar a interpretação dos vários termos, o tensor de deformação deve ser escrito num referencial que acompanha a configuração inicial da secção, ou seja,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R})^t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} (\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{R}) = \text{sim} \left(\hat{\mathbf{D}}^R \right). \tag{2.23}$$

De modo a existir uma distinção entre o sistema de eixos da configuração de referência e os sistemas de eixos locais de cada parede (também na configuração de referência), tal como é habitual nas formulações da GBT (recordar Secção 1.4), daqui em diante serão utilizados os eixos (x, y, z) , cujos vetores de base são dados por

$$\mathbf{E}_x = \mathbf{R}\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{R}\mathbf{E}_2, \tag{2.25}$$

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{R}\mathbf{E}_3. \tag{2.26}$$

Assim, como é mais conveniente definir a curvatura da barra exclusivamente através da rotação da secção, $\boldsymbol{\Lambda}$, define-se

$$\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Lambda}^t \boldsymbol{\Lambda}', \tag{2.27}$$

⁴De facto, repare-se que este vetor corresponde à derivada da posição do eixo da barra, \mathbf{r}' , descontando a rotação e, de seguida, subtraindo \mathbf{E}_1 , que corresponde à direcção longitudinal na configuração de referência. Assim, a componente segundo \mathbf{E}_1 quantifica a extensão do eixo da barra e as restantes componentes quantificam a distorção por corte.

e a curvatura de cada parede \mathbf{K} pode ser posteriormente obtida através de (recorde-se que \mathbf{R} é constante para cada parede)

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{K}} &= (\mathbf{\Lambda R})^t (\mathbf{\Lambda R})' \\ &= \mathbf{R}^t \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}' \mathbf{R} \\ &= \mathbf{R}^t \widetilde{\mathbf{\Omega}} \mathbf{R} \\ \Rightarrow \mathbf{K} &= \mathbf{R}^t \mathbf{\Omega}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Como a rotação \mathbf{R}^t é equivalente a uma transformação de coordenadas entre os referenciais (X_1, X_2, X_3) e (x, y, z) , dada por \mathbf{R} , para permitir uma mais fácil interpretação física e manter uma certa coerência com as formulações clássicas da GBT, as componentes do vetor da curvatura de cada parede \mathbf{K} são designadas de K_x , K_y e K_z , i.e.,

$$\mathbf{K} = K_x \mathbf{E}_x + K_y \mathbf{E}_y + K_z \mathbf{E}_z.\tag{2.29}$$

2.2.2 Curvatura de flexão constante

Considere-se agora o caso particular de uma peça linear cuja configuração inicial apresenta curvatura constante sem componente de torção, i.e.,

$$\mathbf{K} = K_y \mathbf{E}_y + K_z \mathbf{E}_z,\tag{2.30}$$

e sem deformação por corte, ou seja,

$$\mathbf{\Gamma}_A = \Gamma_A \mathbf{E}_x.\tag{2.31}$$

Neste caso tem-se

$$\mathbf{K} \times \mathbf{L} = \begin{bmatrix} K_y z - K_z y \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\tag{2.32}$$

e ainda

$$\left(\mathbf{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{L} \right) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 + \Gamma_A + K_y z - K_z y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{2.33}$$

Tendo em conta a expressão (2.19) e sabendo que $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, a variação de volume entre as configurações inicial e de referência, J_0 , é dado por

$$\begin{aligned}J_0 = \det(\mathbf{F}_0) &= \det(\mathbf{\Lambda}) \det(\mathbf{R}) \det\left(\left(\mathbf{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{L}\right) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1}\right) \\ &= \det\left(\left(\mathbf{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{L}\right) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1}\right) \\ &= 1 + \Gamma_A + K_y z - K_z y,\end{aligned}\tag{2.34}$$

e a expressão (2.33) fica

$$\left(\mathbf{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{L} \right) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} = \begin{bmatrix} J_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{2.35}$$

A inversa de (2.35) é dada por

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

com $\beta = 1/J_0$. Deste modo, o tensor $\hat{\mathbf{D}}^R$ é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{D}}^R &= \left(\begin{bmatrix} 0 & -K_z & K_y \\ K_z & 0 & 0 \\ -K_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \right) \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} K_y U_z - K_z U_y \\ K_z U_x \\ -K_y U_x \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \right) \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left(\begin{bmatrix} K_y U_z - K_z U_y & 0 & 0 \\ K_z U_x & 0 & 0 \\ -K_y U_x & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \right) \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

com o gradiente de deslocamento

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} U_{x,x} & U_{x,y} & U_{x,z} \\ U_{y,x} & U_{y,y} & U_{y,z} \\ U_{z,x} & U_{z,y} & U_{z,z} \end{bmatrix}. \quad (2.38)$$

Assim, a partir de (2.23), as componentes do tensor de deformação são dadas por

$$\varepsilon_{xx} = \beta (K_y U_z - K_z U_y + U_{x,x}), \quad (2.39)$$

$$\varepsilon_{yy} = U_{y,y}, \quad (2.40)$$

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z}, \quad (2.41)$$

$$\gamma_{xy} = \beta (K_z U_x + U_{y,x}) + U_{x,y}, \quad (2.42)$$

$$\gamma_{xz} = \beta (U_{z,x} - K_y U_x) + U_{x,z}, \quad (2.43)$$

$$\gamma_{yz} = U_{y,z} + U_{z,y}. \quad (2.44)$$

Nas Secções 2.4.1 e 2.4.2 estas expressões serão desenvolvidas, após a introdução da descrição cinemática da GBT.

2.2.3 Curvatura de torção constante

Considere-se agora que a configuração inicial não apresenta curvatura de flexão, mas apenas curvatura de torção constante, i.e.,

$$\mathbf{K} = K_x \mathbf{E}_x. \quad (2.45)$$

Admitindo que $\mathbf{\Gamma}_C = \mathbf{0}$, ou seja, que o eixo da peça não sofre deformação entre as configurações de referência e inicial, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_A &= \mathbf{K} \times (\mathbf{R}^t \mathbf{L}_A) \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -K_x [\mathbf{R}^t \mathbf{L}_A]_2 \\ K_x [\mathbf{R}^t \mathbf{L}_A]_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_y \\ \Gamma_z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

o que mostra que a extensão axial do ponto A é nula, mas ocorre distorção nas paredes desde que $\mathbf{L}_A \neq \mathbf{0}$ (como seria lógico esperar, tendo em conta que existe curvatura de torção). Tal como na Secção anterior, procede-se com a obtenção de

$$\mathbf{K} \times \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 \\ -zK_x \\ yK_x \end{bmatrix}, \quad (2.47)$$

e ainda

$$\left(\boldsymbol{\Gamma}_A + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{L} \right) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -zK_x + \Gamma_y & 1 & 0 \\ yK_x + \Gamma_z & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

cuja inversa é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ zK_x - \Gamma_y & 1 & 0 \\ -yK_x - \Gamma_z & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Neste caso, $\det(\mathbf{F}_0) = 1$, logo $J_0 = 1$ e $\hat{\mathbf{D}}^R$ é dado por

$$\hat{\mathbf{D}}^R = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -K_x U_z & 0 & 0 \\ K_x U_y & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{D} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ zK_x - \Gamma_y & 1 & 0 \\ -yK_x - \Gamma_z & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

onde a primeira matriz é obtida por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -K_x \\ 0 & K_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ U_z \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_x U_z \\ K_x U_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -K_x U_z & 0 & 0 \\ K_x U_y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

e a matriz \mathbf{D} encontra-se definida em (2.38). Tendo em conta (2.23), as componentes do tensor de deformação são dadas por

$$\varepsilon_{xx} = U_{x,x} + U_{x,y}(zK_x - \Gamma_y) - U_{x,z}(yK_x + \Gamma_z), \quad (2.52)$$

$$\varepsilon_{yy} = U_{y,y}, \quad (2.53)$$

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z}, \quad (2.54)$$

$$\gamma_{xy} = -K_x U_z + U_{y,x} + U_{y,y}(zK_x - \Gamma_y) - U_{y,z}(yK_x + \Gamma_z) + U_{x,y}, \quad (2.55)$$

$$\gamma_{xz} = K_x U_y + U_{z,x} + U_{z,y}(zK_x - \Gamma_y) - U_{z,z}(yK_x + \Gamma_z) + U_{x,z}, \quad (2.56)$$

$$\gamma_{yz} = U_{y,z} + U_{z,y}. \quad (2.57)$$

Na secção 2.4.4, estas expressões são desenvolvidas introduzindo a descrição cinemática da GBT.

2.3 Equilíbrio

Tal como para peças retas (recordar Secção 1.4), as equações de equilíbrio são obtidas recorrendo ao Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), ou seja,

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0, \quad (2.58)$$

onde δW_{ext} e δW_{int} representam as contribuições das forças exteriores e interiores, respetivamente, dadas por

$$\delta W_{int} = - \int_{V_0} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} dV_0, \quad (2.59)$$

$$\delta W_{ext} = \sum \bar{\mathbf{Q}} \cdot \delta \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.60)$$

onde $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ representa o tensor de tensão que forma um par conjugado com $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, V_0 é o volume da barra na configuração inicial e o somatório estende-se a todas as forças concentradas $\bar{\mathbf{Q}}$, admitindo-se que estão aplicadas no folheto médio das paredes da viga (neste trabalho apenas se consideram este tipo de forças). Para tirar partido da utilização de uma configuração de referência, é necessário alterar o domínio de integração utilizando a relação

$$dV_0 = \det(\mathbf{F}_0) dV = J_0 dV, \quad (2.61)$$

e utilizar os eixos locais de cada parede (recordar (2.23)), o que permite escrever, em notação de Voigt,

$$\delta W_{int} = - \int_V \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{xx} \\ \delta \varepsilon_{yy} \\ \delta \gamma_{xy} \end{bmatrix}^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} J_0 dV, \quad (2.62)$$

onde \mathbf{C} é a matriz constitutiva utilizada na GBT, a qual pode ser dividida em parcelas de membrana e flexão (recordar Secção 1.4.2). Quanto à parcela das forças exteriores, tendo em conta que $\hat{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{R} \mathbf{U}$, tem-se imediatamente

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \sum \bar{\mathbf{Q}} \cdot (\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{R} \delta \mathbf{U}) \\ &= \sum ((\boldsymbol{\Lambda} \mathbf{R})^t \bar{\mathbf{Q}}) \cdot \delta \mathbf{U}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde a segunda forma é particularmente conveniente para utilizar os eixos locais de cada parede.

2.4 Descrição cinemática da GBT

Nas secções seguintes exprime-se o campo de deslocamentos \mathbf{U} através da forma característica da GBT, i.e. usando modos de deformação e funções de amplitude, e obtêm-se as expressões para as várias componentes de deformação. Em particular, desenvolvem-se duas formulações para o caso de barras com curvatura de flexão constante (a “simplificada” na Secção 2.4.1 e a “refinada” na Secção 2.4.2) e uma para o caso da curvatura de torção constante (Secção 2.4.3). Tal como no caso das peças retas, as formulações são desenvolvidas tendo em conta algumas hipóteses simplificativas, nomeadamente:

- a hipótese de Kirchhoff, $\gamma_{xz}^F = \gamma_{yz}^F = \varepsilon_{zz} = 0$;
- a hipótese de Vlasov, $\gamma_{xy}^M = 0$;
- a hipótese de extensões transversais de membrana nulas, $\varepsilon_{yy}^M = 0$.

Conforme foi já referido, (i) a hipótese de Kirchhoff será aceitável se a espessura das paredes for fina, o que é o caso dos exemplos apresentados na presente dissertação, (ii) a hipótese de

Vlasov é em geral aceitável para barras longas com secção aberta ⁵ e (iii) a terceira hipótese, muito embora seja frequentemente adotada na análise de barras (como é o caso do presente trabalho), não é admissível, por exemplo, se se pretender estudar o efeito local da introdução de cargas (e.g., o problema da resistência ao esmagamento/encurvadura de uma alma de um perfil metálico sob a ação de cargas concentradas).

2.4.1 Curvatura de flexão constante — modelo simplificado

Neste primeiro caso, que corresponde à formulação mais simples, admite-se que o campo de deslocamentos corresponde ao que é utilizado na GBT clássica, ou seja,

$$U_x = \bar{u}_k(y) \phi'_k(x) - z\bar{w}_k(y) \phi'_k(x), \quad (2.64)$$

$$U_y = \bar{v}_k(y) \phi_k(x) - z\bar{w}_{k,y}(y) \phi_k(x), \quad (2.65)$$

$$U_z = \bar{w}_k(y) \phi_k(x). \quad (2.66)$$

Para além disso, admite-se que as paredes da secção transversal são finas, pelo que se simplificam as equações assumindo que $z \approx 0$. Assim, a partir de (2.34),

$$z \approx 0 \Rightarrow J_0 \approx 1 + \Gamma_A - K_z y, \quad (2.67)$$

$$\Rightarrow \beta = 1/J_0 = \frac{1}{1 + \Gamma_A - K_z y}. \quad (2.68)$$

As componentes de deformação são dadas pelas expressões (2.39)-(2.44). É possível concluir imediatamente que as componentes ε_{zz} e γ_{yz} se anulam em acordo com a hipótese de Kirchhoff, ou seja

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z} = 0, \quad (2.69)$$

$$\gamma_{yz} = U_{y,z} + U_{z,y} = -\bar{w}_{k,y} \phi_k + \bar{w}_{k,y} \phi_k = 0. \quad (2.70)$$

A componente γ_{xz} é dada por

$$\gamma_{xz} = \beta (\bar{w}_k \phi'_k - K_y \bar{u}_k \phi'_k + K_y z \bar{w}_k \phi'_k) - \bar{w}_k \phi'_k \quad (2.71)$$

e, para que a hipótese de Kirchhoff seja plenamente satisfeita, tem de se anular. Assim, notando que as funções de amplitude desaparecem pela lei do anulamento do produto, obtém-se a relação

$$\bar{w}_k = \frac{K_y \bar{u}_k}{1 + K_y z - 1/\beta} \approx \frac{K_y \bar{u}_k}{1 - J_0} = \frac{K_y \bar{u}_k}{K_z y - \Gamma_A}. \quad (2.72)$$

Esta condição estabelece uma relação entre as funções \bar{u}_k e \bar{w}_k (que não ocorre para peças retas), a qual está associada a uma curvatura segundo o eixo fraco da parede (K_y) e é de natureza semelhante à que ocorre entre \bar{u}_k e \bar{v}_k para uma curvatura K_z em virtude da hipótese de Vlasov, que será discutida um pouco mais à frente. Na presente formulação, simplificada, este constrangimento é desprezado, sendo abordado com mais detalhe na Secção seguinte (formulação refinada).

⁵Como é sabido, barras curtas são em geral mais afetadas pela deformação por esforço transversal e, portanto, não se pode utilizar a hipótese de Vlasov. Por outro lado, a hipótese de Vlasov não permite capturar corretamente o comportamento de torção de secções fechadas, dado que este envolve distorções de membrana.

Capítulo 2. Formulação linear da GBT para vigas curvas

A componente γ_{xy} pode ser decomposta em parcelas de membrana e de flexão, as quais são dadas por

$$\gamma_{xy}^M = \beta K_z \bar{u}_k \phi'_k + \beta \bar{v}_{k,y} \phi'_k + \bar{u}_{k,y} \phi'_k, \quad (2.73)$$

$$\gamma_{xy}^F = -\beta K_z z \bar{w}_k \phi'_k - \beta z \bar{w}_{k,y} \phi'_k - z \bar{w}_{k,y} \phi'_k. \quad (2.74)$$

Para a parcela de membrana, ao impor a hipótese de Vlasov ($\gamma_{xy}^M = 0$), obtém-se uma relação entre \bar{u}_k e \bar{v}_k que deve ser satisfeita, nomeadamente

$$\bar{v}_k = -\frac{\bar{u}_{k,y}}{\beta} - K_z \bar{u}_k. \quad (2.75)$$

Note-se que nas peças retas a relação a satisfazer é bastante mais simples ($\bar{v}_k = -\bar{u}_{k,y}$). Se se considerar, tal como na GBT para vigas retas, que as funções \bar{u}_k são lineares, da forma $a + by$, a expressão anterior pode ser simplificada para

$$\bar{v}_k = -(1 + \Gamma_A - K_z y)b - K_z(a + by) = -(1 + \Gamma_A)b - K_z a, \quad (2.76)$$

o que mostra que as funções \bar{v}_k resultam constantes em cada parede, tal como para o caso das vigas retas. Considere-se agora a parcela de flexão (2.74). Admite-se que esta componente não é significativamente influenciada pela curvatura da peça, pelo que se tem $K_z \approx 0$, $\beta \approx 1$ e

$$\gamma_{xy}^F \approx -2z \bar{w}_{k,y} \phi'_k. \quad (2.77)$$

No que se refere à componente ε_{yy} , a expressão dos seus termos de membrana e flexão resulta idêntica à das peças retas,

$$\varepsilon_{yy}^M = \bar{v}_{k,y} \phi_k = 0, \quad (2.78)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z \bar{w}_{k,y} \phi_k, \quad (2.79)$$

onde se tirou partido do facto de se ter mostrado em (2.76) que as funções \bar{v}_k são constantes e, portanto, $\bar{v}_{k,y} = 0$ e $\varepsilon_{yy}^M = 0$, o que satisfaz a terceira hipótese simplificativa introduzida. Finalmente, a componente ε_{xx} também pode ser decomposta numa parcela de membrana e numa de flexão, as quais são dadas por

$$\varepsilon_{xx}^M = \beta (K_y \bar{w}_k \phi_k - K_z \bar{v}_k \phi_k + \bar{u}_k \phi''_k), \quad (2.80)$$

$$\varepsilon_{xx}^F = \beta (K_z z \bar{w}_{k,y} \phi_k - z \bar{w}_k \phi''_k), \quad (2.81)$$

e note-se que as expressões para vigas retas são imediatamente recuperadas fazendo $\beta = 1$ e $K_y = K_z = 0$. Resumindo, as componentes de deformação para a formulação simplificada são

$$\varepsilon_{xx}^M = \beta (K_y \bar{w}_k - K_z \bar{v}_k) \phi_k + \beta \bar{u}_k \phi''_k, \quad (2.82)$$

$$\varepsilon_{xx}^F = \beta K_z z \bar{w}_{k,y} \phi_k - \beta z \bar{w}_k \phi''_k, \quad (2.83)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z \bar{w}_{k,y} \phi_k, \quad (2.84)$$

$$\gamma_{xy}^F = -2z \bar{w}_{k,y} \phi'_k \quad (2.85)$$

$$\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yy}^M = \gamma_{xy}^M = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0, \quad (2.86)$$

com $\beta = 1/J_0$ e $J_0 = 1 + \Gamma_A - K_z y$.

2.4.2 Curvatura de flexão constante — modelo refinado

Considere-se agora que o campo de deslocamentos tem um formato mais genérico, sendo dado por

$$U_x = \bar{u}_k(y) \phi'_k(x) + z \bar{\alpha}_k(y) \phi'_k(x), \quad (2.87)$$

$$U_y = \bar{v}_k(y) \phi_k(x) + z \bar{\theta}_k(y) \phi_k(x), \quad (2.88)$$

$$U_z = \bar{w}_k(y) \phi_k(x), \quad (2.89)$$

onde os termos de membrana são idênticos aos da GBT clássica, mas os termos de flexão são agora dados pelas funções $\bar{\alpha}_k$ e $\bar{\theta}_k$, as quais serão determinadas ao impor as hipóteses simplificativas adotadas. Em acréscimo, a simplificação $z \approx 0$ não será efetuada de início e, portanto, por agora, considera-se que $\beta = 1/J_0 = 1/(1 + \Gamma_A + K_y z - K_z y)$. Começa-se por notar que a condição $\varepsilon_{zz} = 0$ é imediatamente satisfeita, dado que

$$\varepsilon_{zz} = U_{z,z} = 0. \quad (2.90)$$

Por outro lado, como a descrição cinemática para $z = 0$ é idêntica à da secção anterior, a hipótese de Vlasov fornece também a condição

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^M &= \beta (K_z U_x + U_{y,x}) + U_{x,y} \\ &= \beta (K_z \bar{u}_k \phi'_k + \bar{v}_k \phi'_k) + \bar{u}_{k,y} \phi'_k = 0 \\ \Rightarrow \bar{v}_k &= -\frac{\bar{u}_{k,y}}{\beta} - K_z \bar{u}_k, \end{aligned} \quad (2.91)$$

com β calculado para $z = 0$ e portanto, tal como na secção anterior, este termo é constante para funções \bar{u}_k lineares.

De acordo com a hipótese de Kirchhoff, $\gamma_{yz} = 0$, o que conduz à equação

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} &= U_{y,z} + U_{z,y} \\ &= \bar{\theta}_k \phi_k + \bar{w}_{k,y} \phi_k = 0 \\ \Rightarrow \bar{\theta}_k &= -\bar{w}_{k,y}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

o que mais uma vez corresponde ao caso da secção anterior. Finalmente, a função $\bar{\alpha}_k$ é determinada impondo a hipótese de Kirchhoff à componente γ_{xz} , resultando em

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} &= \beta (U_{z,x} - K_y U_x) + U_{x,z} \\ &= \beta (\bar{w}_k - K_y \bar{u}_k - z K_y \bar{\alpha}_k) \phi'_k + \bar{\alpha}_k \phi'_k = 0 \\ \Rightarrow \bar{\alpha}_k &= \frac{\beta (K_y \bar{u}_k - \bar{w}_k)}{1 - z \beta K_y}. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Esta solução não respeita a condição $\bar{\alpha}_k = \bar{\alpha}_k(y)$. Recorre-se assim a uma expansão em série de Taylor (com $\beta = 1/(1 + \Gamma_A + K_y z - K_z y)$) em torno de $z = 0$, o que fornece

$$\bar{\alpha}_k = \frac{K_y \bar{u}_k - \bar{w}_k}{1 + \Gamma_A - K_z y} + O(z^6), \quad (2.94)$$

pelo que se pode considerar apenas o primeiro termo sem perda de precisão significativa. Assim, o campo de deslocamentos é dado por

$$U_x = (\bar{u}_k(y) - z \beta (y) (\bar{w}_k(y) - K_y \bar{u}_k(y))) \phi'_k(x), \quad (2.95)$$

$$U_y = (\bar{v}_k - z \bar{w}_{k,y}(y)) \phi_k(x), \quad (2.96)$$

$$U_z = \bar{w}_k(y) \phi_k(x), \quad (2.97)$$

onde as funções \bar{u}_k são lineares, as funções \bar{v}_k são constantes (conforme indicado) e dadas por (2.91), e $\beta(y) = 1/(1 + \Gamma_A - K_z y)$. Com estas expressões, obtém-se para as componentes de deformação (2.39)-(2.44)

$$\varepsilon_{xx}^M = \beta (K_y \bar{w}_k - K_z \bar{v}_k) \phi_k + \beta \bar{u}_k \phi_k'', \quad (2.98)$$

$$\varepsilon_{xx}^F = -z\beta (-K_z \bar{w}_{k,y} \phi_k + \beta (\bar{w}_k - K_y \bar{u}_k) \phi_k'), \quad (2.99)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z \bar{w}_{k,yy} \phi_k, \quad (2.100)$$

$$\gamma_{xy}^F = -z\beta (2\beta K_z (\bar{w}_k - K_y \bar{u}_k) + 2\bar{w}_{k,y} - K_y \bar{u}_{k,y}) \phi_k', \quad (2.101)$$

$$\gamma_{xz} = z\beta^2 K_y (\bar{w}_k - K_y \bar{u}_k) \phi_k' \approx 0, \quad (2.102)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy}^M = \gamma_{yz} = 0. \quad (2.103)$$

onde, na determinação de γ_{xy}^F , se utilizou a relação $\beta_{,y} = K_z \beta^2$ e, recorde-se, γ_{xz} só se anula verdadeiramente para $z = 0$, em virtude da simplificação introduzida. Entre a presente formulação e a da secção anterior, é possível identificar algumas diferenças. Muito embora as componentes de membrana sejam idênticas, surgem mais termos nas componentes de flexão, nomeadamente um termo em ε_{xx}^F (e uma multiplicação por β) e vários termos em γ_{xy}^F .

2.4.3 Comparação com a solução do Método das Faixas Finitas

Nesta secção comparam-se as expressões da GBT com as expressões clássicas utilizadas no contexto do Método das Faixas Finitas para o caso curvo (MFF — ver, por exemplo, Cheung e Cheung, 1971). De acordo com o MFF, utilizando uma notação semelhante à do presente trabalho, as componentes de deformação para faixas com curvatura de flexão constante são dadas, em coordenadas cilíndricas (x, θ, r) , por

$$\varepsilon_{\theta\theta}^M = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{w \cos \varphi + v \operatorname{sen} \varphi}{r}, \quad (2.104)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.105)$$

$$\gamma_{\theta y}^M = \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u \operatorname{sen} \varphi}{r}, \quad (2.106)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^F = -z \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial u \cos \varphi}{r \partial \theta} + \frac{\partial w \operatorname{sen} \varphi}{\partial y} \frac{1}{r} \right), \quad (2.107)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2.108)$$

$$\gamma_{\theta y}^F = -2z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y r \partial \theta} - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{r} \frac{\partial w}{r \partial \theta} - \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi}{r^2} u \right), \quad (2.109)$$

onde u, v, w são os deslocamentos, conforme a notação estabelecida na GBT, e φ é o ângulo de inclinação da parede, conforme mostra a Figura 2.3.

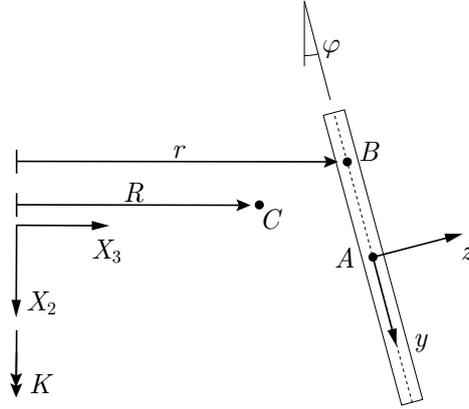


Figura 2.3: Grandezas envolvidas nas equações do Método das Faixas Finitas.

Considerando, em acordo com a Figura 2.3, que $K = 1/R$, então têm-se as seguintes relações⁶

$$K_y = \frac{\cos \varphi}{R}, \quad (2.110)$$

$$K_z = -\frac{\text{sen} \varphi}{R}, \quad (2.111)$$

$$Rd\theta = dx, \quad (2.112)$$

$$r = J_0 R = \frac{R}{\beta}, \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial(\cdot)}{r\partial\theta} = \beta \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}. \quad (2.114)$$

Assim, as deformações de membrana podem ser escritas como

$$\varepsilon_{xx}^M = \beta(u_{,x} + K_y w - K_z v), \quad (2.115)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = v_{,y}, \quad (2.116)$$

$$\gamma_{xy}^M = \beta v_{,x} + u_{,y} + \beta u, \quad (2.117)$$

expressões que coincidem exatamente com (2.39)-(2.41) considerando apenas os termos de membrana, ou seja, $U_x = u$, $U_y = v$, $U_z = w$. Por outro lado, os termos de flexão fornecem

$$\varepsilon_{xx}^F = -z (\beta^2 w_{,xx} - \beta^2 K_y u_{,x} - \beta K_z w_{,y}), \quad (2.118)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z w_{,yy}, \quad (2.119)$$

$$\gamma_{xy}^F = -2z (\beta w_{,xy} + \beta^2 K_z w_{,x} - \beta K_y u_{,y} - \beta^2 K_y K_z u) \quad (2.120)$$

e, utilizando a aproximação da GBT $u = \bar{u}\phi'$, $v = \bar{v}\phi$, $w = \bar{w}\phi$ (não existe a necessidade de introduzir o índice do modo), obtêm-se exatamente (2.99) e (2.100). Quanto ao termo γ_{xy}^F , as expressões (2.101) e (2.120) apenas diferem no facto de, na primeira (GBT), o termo $z\beta K_y \bar{u}_{k,y} \phi'_k$ não ser multiplicado por 2. Conclui-se assim que, a menos deste termo, as equações da GBT correspondem às do MFF para peças com curvatura de flexão.

⁶Note-se que o comprimento do eixo mantém-se inalterado entre as configurações de referência e inicial, permitindo obter a relação (2.112). Tendo em conta que a espessura e a largura das paredes mantêm as suas dimensões, o jacobiano J_0 pode ser aplicado diretamente ao comprimento do eixo, obtendo-se a relação (2.113)

2.4.4 Curvatura de torção constante

Considere-se agora o caso de peças com curvatura de torção constante. Considere-se ainda que o campo de deslocamentos corresponde ao formato clássico da GBT, ou seja,

$$U_x = \bar{u}_k(y) \phi'_k(x) - z \bar{w}_k(y) \phi'_k(x), \quad (2.121)$$

$$U_y = \bar{v}_k(y) \phi_k(x) - z \bar{w}_{k,y}(y) \phi_k(x), \quad (2.122)$$

$$U_z = \bar{w}_k(y) \phi_k(x). \quad (2.123)$$

Substituindo nas componentes de deformação (2.52)-(2.57), obtém-se

$$\varepsilon_{xx}^M = \bar{u}_k \phi_k'' - \Gamma_y \bar{u}_{k,y} \phi_k' + (yK_x + \Gamma_z) \bar{w}_k \phi_k', \quad (2.124)$$

$$\varepsilon_{xx}^F = -z (\bar{w}_k \phi_k'' - \Gamma_y \bar{w}_{k,y} \phi_k' - K_x \bar{u}_{k,y} \phi_k'), \quad (2.125)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = \bar{v}_{k,y} \phi_k, \quad (2.126)$$

$$\varepsilon_{yy}^F = -z \bar{w}_{k,yy} \phi_k, \quad (2.127)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad (2.128)$$

$$\gamma_{xy}^M = (-K_x \bar{w}_k + (yK_x + \Gamma_z) \bar{w}_{k,y}) \phi_k + (\bar{v}_k + \bar{u}_{k,y}) \phi_k', \quad (2.129)$$

$$\gamma_{xy}^F = -z (2\bar{w}_{k,y} \phi_k' - \Gamma_y \bar{w}_{k,yy} \phi_k), \quad (2.130)$$

$$\gamma_{xz} = (K_x \bar{v}_k - \Gamma_y \bar{w}_{k,y}) \phi_k, \quad (2.131)$$

$$\gamma_{yz} = 0, \quad (2.132)$$

onde se desprezaram os termos com z^2 , tendo em conta que a espessura é fina. Tal como nas secções anteriores, estas expressões podem ser simplificadas recorrendo às hipóteses cinemáticas admitidas. Note-se que se tem já $\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = 0$, em concordância com a hipótese de Kirchhoff, restando apenas verificar a condição $\gamma_{xz} = 0$. No entanto, o anulamento da expressão (2.131) conduz a

$$\bar{v}_k = \frac{\Gamma_y}{K_x} \bar{w}_{k,y} \quad (2.133)$$

o que, apesar de Γ_y e K_x serem constantes em cada parede, impõe uma relação entre \bar{v}_k e $\bar{w}_{k,y}$ ⁷. Em casos onde ocorra flexão transversal, tem-se $\varepsilon_{yy}^F \neq 0 \Rightarrow \bar{w}_{k,yy} \neq 0$, pelo que \bar{v}_k será, em geral, um polinómio de grau superior ao primeiro. Esta condição implica que a hipótese $\varepsilon_{yy}^M = 0$ não pode ser satisfeita no caso de se considerar flexão transversal. No entanto, para funções \bar{w}_k lineares, as funções \bar{v}_k são constantes em cada parede e consegue-se $\varepsilon_{yy}^M = 0$. Também não é evidente de que forma se consegue impor diretamente a hipótese de Vlasov, dado que a expressão (2.129) envolve acoplamentos entre \bar{u}_k , \bar{v}_k e \bar{w}_k . Uma via simples, consiste em desprezar simplesmente os termos associados à curvatura, o que permite recuperar a relação das vigas retas, ou seja, $\bar{v}_k = -\bar{u}_{k,y}$. No presente trabalho optou-se por não prosseguir com a exploração deste caso particular, dirigindo a atenção apenas a análise de peças com curvatura inicial constante de flexão.

⁷Note-se que, da expressão (2.46), existe uma relação entre Γ_y e K_x , a qual é dada por $\Gamma_y = -K_x [\mathbf{R}^t \mathbf{L}_A]_z$. Assim, a relação entre \bar{v}_k e $\bar{w}_{k,y}$ depende apenas da configuração da secção transversal (nomeadamente de $[\mathbf{R}^t \mathbf{L}_A]_z$) e não da curvatura inicial da barra.

2.5 Formulação de um elemento finito

A formulação do elemento finito implementado no contexto do presente trabalho apresenta muitas semelhanças à do elemento proposto por Gonçalves e Camotim, 2012 (recordar Secção 1.4.3). Em particular, o esquema de interpolação é idêntico, muito embora as equações envolvam agora mais termos em virtude da curvatura da peça. No entanto, as expressões de deformação foram já relativamente simplificadas nas Secções 2.4.1 e 2.4.2, pelo que a sua implementação é uma tarefa relativamente simples. Admitindo válidas as hipóteses simplificativas apresentadas anteriormente, tem-se $\varepsilon_{yy}^M = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy}^M = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ e o tensor de deformação pode ser escrito numa forma vetorial

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.134)$$

onde as componentes ε_{yy} e γ_{xy} apresentam apenas termos de flexão. Tendo em conta as expressões (2.82)-(2.86) (modelo simplificado) e (2.98)-(2.103) (modelo refinado), as componentes de deformação podem ser escritas através de

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon^M + \varepsilon^F = \Xi_\varepsilon(y, z) \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \\ \phi_{,xx}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.135)$$

$$\Xi_\varepsilon(y, z) = \Xi_\varepsilon^M(y) + z\Xi_\varepsilon^F(y), \quad (2.136)$$

onde a matriz Ξ_ε^M é dada por

$$\Xi_\varepsilon^M(y) = \begin{bmatrix} \beta (K_y \bar{\mathbf{w}}^t(y) - K_z \bar{\mathbf{v}}^t(y)) & \mathbf{0} & \beta \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.137)$$

sendo idêntica para os dois modelos (recorde-se que as componentes de membrana têm expressões idênticas neste caso), e a matriz Ξ_ε^F é dada por

$$\Xi_\varepsilon^F(y) = - \begin{bmatrix} -\beta K_z \bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} & \beta \bar{\mathbf{w}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,yy}^t(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

para o modelo simplificado, e

$$\Xi_\varepsilon^F(y) = - \begin{bmatrix} -\beta K_z \bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} & \beta^2 (\bar{\mathbf{w}}^t(y) - K_y \bar{\mathbf{u}}^t(y)) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,yy}^t(y) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [\Xi_\varepsilon^F]_{32} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.139)$$

para o modelo refinado, com o termo em falta dado por

$$[\Xi_\varepsilon^F]_{32} = \beta (2\beta K_z \bar{\mathbf{w}}^t(y) - 2\beta K_z K_y \bar{\mathbf{u}}^t(y) + 2\bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) - K_y \bar{\mathbf{u}}_{,y}^t(y)). \quad (2.140)$$

O campo de deslocamentos pode ser escrito na forma

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \Xi_U(y, z) \begin{bmatrix} \phi(x) \\ \phi_{,x}(x) \end{bmatrix}, \quad (2.141)$$

$$\Xi_U(y, z) = \Xi_U^M(y) + z\Xi_U^F(y), \quad (2.142)$$

onde a matriz Ξ_U^M é dada por

$$\Xi_U^M(y) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{w}}^t(y) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.143)$$

sendo mais uma vez idêntica para ambos os modelos, e a matriz Ξ_U^F é dada por

$$\Xi_U^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{\mathbf{w}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

para o modelo simplificado e

$$\Xi_U^F(y) = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \beta (\bar{\mathbf{w}}^t(y) - K_y \bar{\mathbf{u}}^t(y)) \\ \bar{\mathbf{w}}_{,y}^t(y) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.145)$$

para o modelo refinado. Considerando as expressões (2.62) e (2.63) do PTV para peças de eixo curvo sujeitas a cargas concentradas aplicadas no plano médio das paredes, e interpolando as funções de amplitude em acordo com exposto na Secção 1.4.3 (funções de Hermite e Lagrange), obtém-se

$$-\delta d^t \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t C \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} J_0 dV d + \sum \delta d^t \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t ((\Lambda R)^t \bar{Q}) = 0, \quad (2.146)$$

onde é possível identificar o vetor das forças exteriores \bar{Q} ,

$$\sum \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \end{bmatrix}^t (\Xi_U^M)^t ((\Lambda R)^t \bar{Q}) \quad (2.147)$$

e a matriz de rigidez \mathbf{K}

$$\mathbf{K} = \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t C \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} J_0 dV. \quad (2.148)$$

No entanto, considerando a subdivisão da deformação em termos de membrana e flexão, dada pela expressão (2.136), é possível separar as duas parcelas (os termos cruzados surgem multiplicados por z e conseqüentemente anulam-se com a integração na espessura) e utilizar um operador constitutivo diferente em cada um dos casos. Em particular, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \Xi_\varepsilon^t C \Xi_\varepsilon \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} J_0 dV \\ &= \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t (\Xi_\varepsilon^M + z \Xi_\varepsilon^F)^t C (\Xi_\varepsilon^M + z \Xi_\varepsilon^F) \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} J_0 dV \\ &= \int_V \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix}^t \left((\Xi_\varepsilon^M)^t C^M \Xi_\varepsilon^M + z^2 (\Xi_\varepsilon^F)^t C^F \Xi_\varepsilon^F \right) \begin{bmatrix} \Psi \\ \Psi_{,x} \\ \Psi_{,xx} \end{bmatrix} J_0 dV. \end{aligned} \quad (2.149)$$

Assim, caso se admita que não existem tensões normais transversais e extensões transversais ($\sigma_{yy} = \varepsilon_{yy} = 0$), o que no presente trabalho é sempre admitido para os termos de membrana e, em alguns exemplos, também para os termos de flexão (nos exemplos em que não se considera a deformação da secção no seu plano), utiliza-se

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (2.150)$$

No caso de se considerar a deformação da secção no seu plano, admite-se que o estado de tensão para os termos de flexão corresponde a um estado plano de tensão e utiliza-se

$$\mathbf{C}^F = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.151)$$

2.6 Detalhes da implementação

O elemento finito proposto (para o caso de curvatura de flexão constante) foi implementado em *MATLAB* (Mathworks, 2013), tendo como ponto de partida as rotinas desenvolvidas por Henriques (2014), relativas a um elemento finito fisicamente não-linear da GBT para vigas retas e que não considera a flexão transversal da secção (cinematicamente bastante mais simples do que o do presente elemento). Nas Secções seguintes descrevem-se com detalhe as rotinas utilizadas. Antes de prosseguir, refere-se que, muito embora se estude apenas o caso de barras com curvatura de flexão constante, as rotinas desenvolvidas podem ser facilmente adaptadas para outros casos mais complexos (e.g., curvatura de torção constante, curvaturas variáveis).

2.6.1 Programa principal

Nesta rotina estabelecem-se os parâmetros que definem o problema, nomeadamente a geometria da barra e da sua secção transversal, as condições de apoio, o carregamento, as propriedades dos materiais e os modos de deformação da secção. São também definidos outros parâmetros como o número de pontos de integração em cada direcção. A curvatura inicial do eixo da barra é introduzida fornecendo o ângulo e o raio de curvatura. A rotina procede com o cálculo, para cada parede, (i) da respetiva matriz de rotação \mathbf{R} , a qual é utilizada no cálculo do vetor das curvaturas no referencial local (ver Secção 2.2.1), e (ii) dos vetores \mathbf{L}_A e $\mathbf{\Gamma}_A$, de modo a permitir obter J_0 , dado por (2.34), o qual é essencial no cálculo da matriz de rigidez e das componentes de deformação.

O programa principal chama a rotina *auxiliares*, onde se definem as funções de interpolação (de Hermite e de Lagrange) e calculam-se todas as matrizes auxiliares necessárias à determinação da matriz de rigidez e do vetor das forças nodais, nomeadamente as matrizes $\mathbf{\Xi}_\varepsilon$ e $\mathbf{\Psi}$ (e suas derivadas) nos pontos de integração segundo y e x , respetivamente, para evitar cálculo simbólico. A principal alteração relativamente à rotina original de Henriques (2014) diz respeito à introdução do efeito da curvatura e das componentes de deformação para barras curvas (de acordo com as expressões definidas nas Secções 2.4.1 e 2.4.2).

O cálculo da matriz de rigidez de cada elemento é efetuado na rotina *CalcularKt*, recorrendo a uma integração numérica com a regra de quadratura de Gauss e utilizando as matrizes previamente calculadas na rotina *auxiliares*. A título de exemplo, representa-se na Figura 2.4

a numeração adotada utilizada para os pontos de integração (neste caso utilizaram-se 3 pontos segundo x (direção longitudinal) e 2 pontos segundo y (direção da linha média das paredes, no plano da secção transversal) e z (direção da espessura).

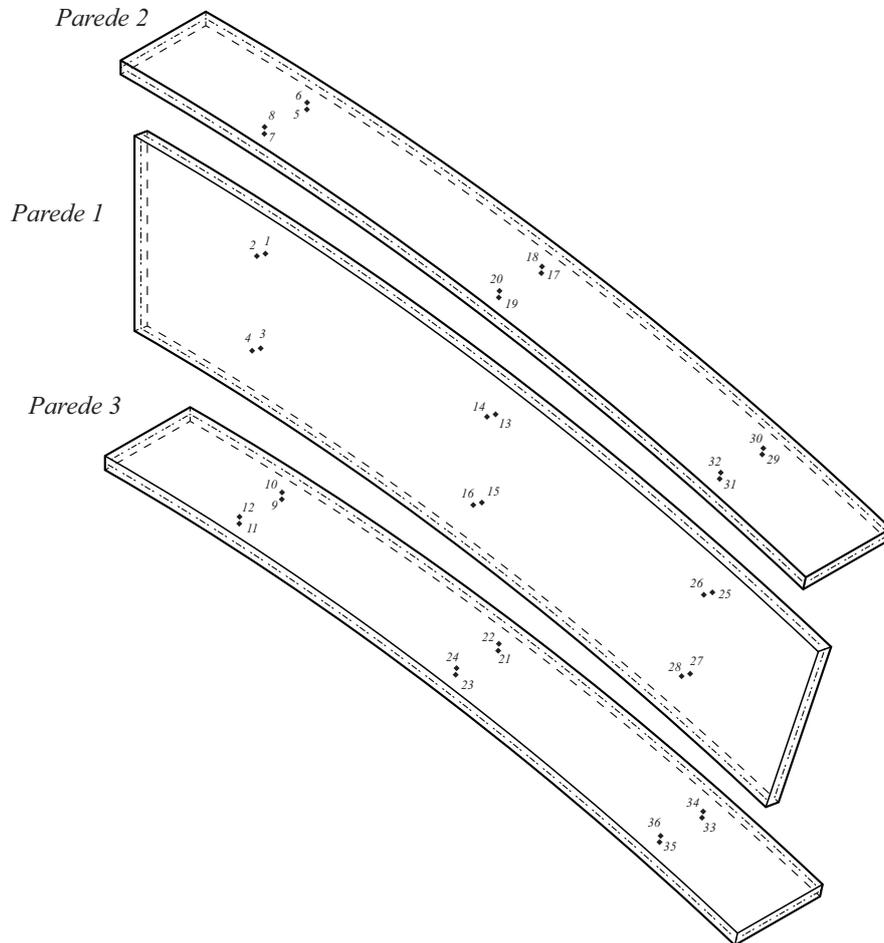


Figura 2.4: Numeração dos pontos de integração para um elemento finito cuja secção transversal é constituída por três paredes, admitindo 3 pontos segundo x e 2 pontos segundo y e z .

A matriz de rigidez de cada elemento é de dimensão⁸ $4N - N_w$ e a matriz de rigidez global é de dimensão $2Nn_e + 2N - N_w$, onde N e N_w foram definidos na Secção 1.4.3 e n_e é o número de elementos finitos utilizados para discretizar a barra. Na Figura 2.5 mostra-se a forma de montar a matriz de rigidez global a partir das matrizes elementares, para $n_e = 2$, a qual é bastante expedita em virtude da sequência adotada para os graus de liberdade no vetor \mathbf{d} (recordar (1.53)). O mesmo se passa na determinação do vetor-coluna das forças exteriores global, \mathbf{Q} , que é montado a partir dos respectivos vetores elementares, de dimensão $4N - N_w$ — na Figura 2.5 ilustra-se o processo de montagem do vetor para $n_e = 2$.

Como no presente trabalho apenas se consideram condições de fronteira cinemáticas correspondentes a eliminar deslocamentos e rotações, a sua implementação é efetuada através da eliminação dos graus de liberdade correspondentes na matriz de rigidez e no vetor das forças

⁸Como é lógico, as matrizes são quadradas, pelo que as dimensões representam tanto o número de linhas como o de colunas.

2.6. Detalhes da implementação

globais. Como em todos os exemplos apresentados no Capítulo 3 se considera apenas um encastramento na extremidade inicial da barra, tal condição é facilmente aplicada eliminando os graus de liberdade associados às funções de interpolação F_1 , H_1 e H_2 (ou seja, para $x = 0$) do primeiro elemento finito.

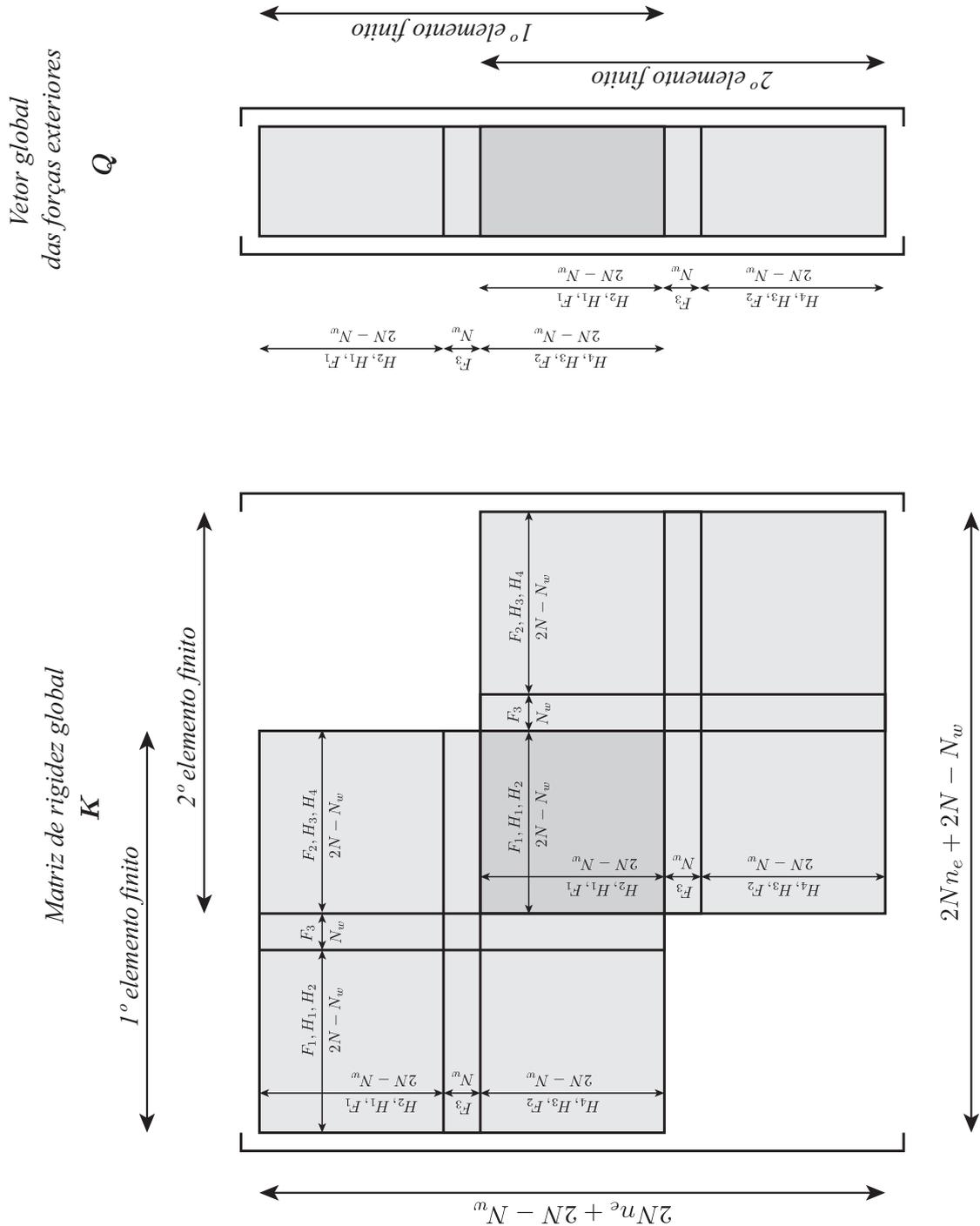


Figura 2.5: Montagem da matriz de rigidez global \mathbf{K} e do vetor global das forças exteriores \mathbf{Q} a partir das matrizes e vetores elementares, para uma discretização com dois elementos finitos (adaptado de Henriques, 2014).

Os valores nodais das funções de amplitude são finalmente obtidos a partir de

$$d = K^{-1}Q, \quad (2.152)$$

após o que se pode passar à fase de pós-processamento da solução.

2.6.2 Representação gráfica

A representação gráfica dos resultados envolve três aspetos: (i) a representação da configuração indeformada, (ii) a representação da configuração deformada e (iii) a representação do campo de tensões. A rotina original de Henriques (2014) efetua todos os cálculos necessários para obter as representações referidas, para o caso de barras de eixo reto. Assim, no contexto do presente trabalho, as rotinas foram adaptadas para representar barras curvas e, de modo a conseguir uma melhor eficiência computacional, todos os cálculos foram transportados para o ambiente *MuPad* (Mathworks, 2013), feito especialmente para cálculo algébrico. Assim, na rotina *figura* (escrita em *MATLAB*) procede-se à discretização dos elementos finitos em vários polígonos (para uma melhor e mais realista visualização dos deslocamentos e tensões na peça) e à definição de um fator de escala para o campo de deslocamentos. Com base no *output* da rotina *auxiliar* (escrita em *MuPad*), a rotina *figura* procede à representação gráfica final, recorrendo à função *patch*, que permite desenhar polígonos tridimensionais coloridos⁹. A função *patch* permite ainda definir a cor da linha que delimita os polígonos (*EdgeColor*) e a cor da face de cada polígono (*FaceColor*). De modo a representar o campo de tensões (que não é constante em cada polígono) recorre-se a *FaceVertexCData*, que associa a cada vértice do polígono o respetivo valor da tensão; a interpolação nas arestas é linear e é efetuada pelo comando *interp*.

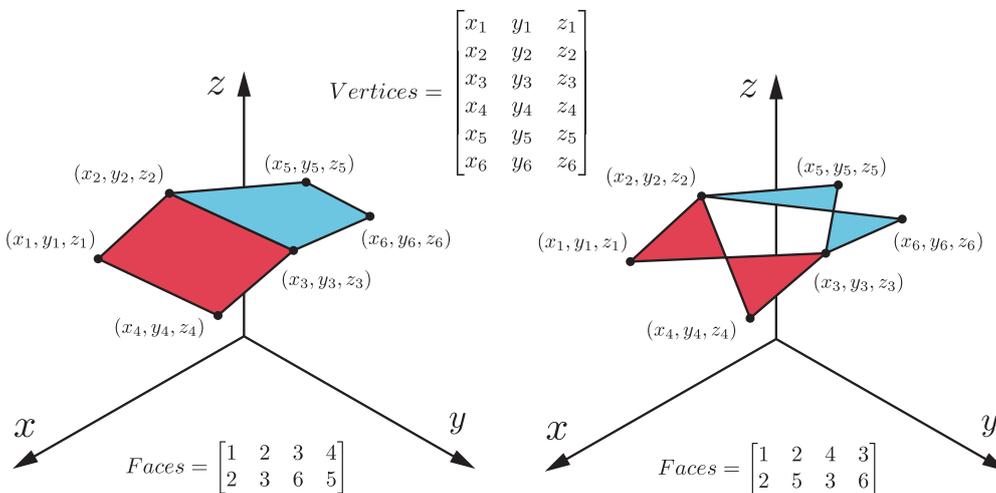


Figura 2.6: Ordenação correta (à esquerda) e incorreta (à direita) da matriz *Faces*.

A rotina *auxiliar* tem como *output* as matrizes (i) *Vertices* e (ii) *Faces* para a configuração deformada e as matrizes (iii) *Vertices* e (iv) *FaceVertexCData* para a configuração deformada

⁹Esta função recorre aos comandos *Vertices* e *Faces* para efetuar a representação. Cada linha da matriz *Vertices* corresponde a um ponto, sendo cada coluna referente a uma coordenada no referencial utilizado pelo programa (x, y, z). As linhas da matriz *Faces* representam cada polígono a representar e as colunas indicam os pontos que perfazem os vértices do polígono, e.g., se um polígono é formado pelos pontos correspondentes às entradas 1, 2, 3 e 4 da matriz *Vertices* (e conectados nesta ordem), a linha respetiva na matriz *Faces* é 1234 (ver Figura 2.6)

2.6. Detalhes da implementação

(a matriz $Faces$ é igual nas duas configurações). O cálculo das coordenadas dos pontos de ambas as configurações é efetuado considerando a expressão (2.14) (considerando $\mathbf{U} = 0$ na configuração indeformada). Finalmente, o campo de deslocamentos \mathbf{U} é calculado tendo em conta a expressão (2.141) e as tensões são calculadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\Xi}_\varepsilon\boldsymbol{\phi}. \quad (2.153)$$

Capítulo 3

Aplicações

3.1 Introdução

Neste capítulo apresentam-se algumas aplicações da formulação da GBT desenvolvida. Em cada caso, discutem-se os resultados obtidos e comparam-se com soluções analíticas disponíveis e com resultados obtidos através do programa de elementos finitos *ADINA* (Bathe, 2014).

Todos os exemplos estudados consistem numa consola a 90° , conforme representado na Figura 3.1, sujeita à ação de uma carga concentrada, aplicada na extremidade livre. Os exemplos diferem entre si apenas na geometria da secção transversal, na curvatura imposta e na orientação da carga aplicada. A principal grandeza utilizada na comparação dos resultados obtidos é o deslocamento da extremidade livre da consola.

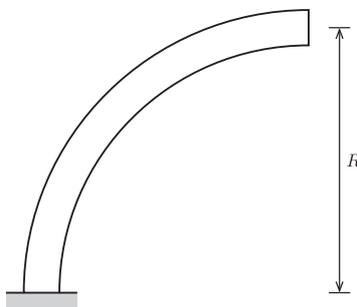


Figura 3.1: Consola a 90° e raio R .

Sempre que a secção transversal for constituída por múltiplas paredes, quando for necessário indicar a parede associada a uma determinada grandeza/variável, esta é colocada em índice superior, e.g., o modo de deformação \bar{u}_k da parede 2 indica-se por \bar{u}_k^{P2} .

3.2 Esforço axial e flexão no plano da figura

3.2.1 Secção retangular de parede fina — comparação com a Teoria clássica

Em primeiro lugar considera-se o caso mais simples: uma secção transversal constituída por uma única parede (de espessura fina), orientada como mostra a Figura 3.2, em que a altura da secção (a sua maior dimensão) se encontra alinhada com o eixo y . A curvatura da parede (necessariamente constante) ocorre em torno do eixo z , o qual é ortogonal ao plano da figura,

pelo que se tem $K_z = 1/R$, sendo R o raio de curvatura do eixo da barra. As expressões da formulação da GBT desenvolvida serão comparadas com as da teoria clássica de Winkler-Bach (ver, por exemplo, Armero e Valverde, 2012).

É de salientar que neste caso não ocorre deformação de flexão (i.e., deformação variando na direção da espessura), pelo que é indiferente utilizar a formulação simplificada ou refinada, já que os termos de membrana coincidem.

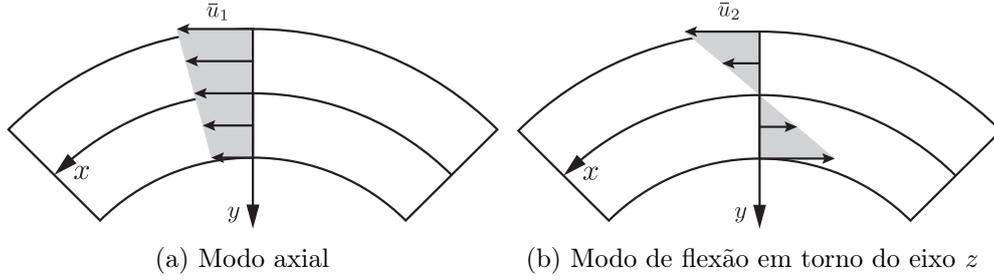


Figura 3.2: Componente \bar{u}_k para os modos de deformação axial e de flexão, para a secção retangular de parede fina ($K_z \neq 0$).

No caso da GBT, começa-se por notar que, com $K_y = 0$, as componentes de deformação relevantes são dadas por (2.82)-(2.86), as quais se simplificam para

$$(\varepsilon_{xx}^M)_k = \beta (-K_z \bar{v}_k \phi_k + \bar{u}_k \phi_k''), \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_{yy}^M = \gamma_{xy}^M = 0, \quad (3.2)$$

com

$$\beta = \frac{1}{1 - K_z y}, \quad (3.3)$$

dado que $\Gamma_A = 0$ (o eixo da parede coincide com o eixo de referência). Nesta secção, para simplificar as expressões, o índice M será doravante omitido, dado que apenas existem termos de membrana.

Tendo em conta que se pretende estudar o comportamento da barra sob esforço axial e flexão, torna-se necessário obter as expressões dos modos de deformação da GBT. Recorde-se que, como se está a impor a hipótese de Vlasov, os deslocamentos \bar{u}_k e \bar{v}_k estão relacionados pela expressão (2.75).

O modo axial corresponde a $k = 1$ e é ilustrado na Figura 3.2a. Este modo é caracterizado por deslocamentos verticais (e laterais) nulos, ou seja, $\bar{v}_1 = \bar{w}_1 = 0$, e deslocamentos axiais lineares (no máximo). Impondo a condição $\bar{u}_1(y = 0) = 1$, o que corresponde a admitir que se tem $\bar{u}_1 = 1 + by$, onde b é uma constante, a imposição da hipótese de Vlasov (2.75) permite concluir o seguinte

$$0 = -\bar{u}_{1,y}(1 - K_z y) - K_z \bar{u}_1, \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow b = -K_z. \quad (3.5)$$

Assim, o modo axial é dado pelas funções

$$\bar{u}_1 = 1 - K_z y = 1 - \frac{y}{R}, \quad (3.6)$$

$$\bar{v}_1 = 0, \quad (3.7)$$

$$\bar{w}_1 = 0. \quad (3.8)$$

3.2. Esforço axial e flexão no plano da figura

O modo de flexão, que corresponde a $k = 2$, é ilustrado na Figura 3.2b. Este modo possui deslocamento vertical unitário ($\bar{v}_2 = 1$) e deslocamento lateral nulo ($\bar{w}_2 = 0$). Tal como no caso anterior, os deslocamentos axiais são obtidos a partir da hipótese de Vlasov, impondo $\bar{u}_2(y = 0) = 0$. Procedendo desta forma, $\bar{u}_2 = by$, onde b é uma constante, e tem-se

$$1 = -\bar{u}_{2,y}(1 - K_z y) - K_z \bar{u}_2, \quad (3.9)$$

$$\Rightarrow b = -1. \quad (3.10)$$

O modo de flexão é assim dado por

$$\bar{u}_2 = -y, \quad (3.11)$$

$$\bar{v}_2 = 1, \quad (3.12)$$

$$\bar{w}_2 = 0. \quad (3.13)$$

Substituindo as funções dos modos em (3.1), obtém-se

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx})_1 &= (1 - K_z y)\beta\phi_1'' \\ &= \phi_1'', \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{xx})_2 &= -\beta(K_z\phi_2 + y\phi_2'') \\ &= \frac{-1}{1 - K_z y}(K_z\phi_2 + y\phi_2''). \end{aligned} \quad (3.15)$$

As equações de equilíbrio podem ser obtidas particularizando a equação geral do PTV (2.62) para o caso em análise, o que conduz a um trabalho das forças interiores dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} J_0 dV \\ &= - \sum_{i,k=1}^2 \int_V (\sigma_{xx})_i (-K_z \bar{v}_k \delta \phi_k + \bar{u}_k \delta \phi_k'') dV. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Recorrendo a uma integração por partes, para efetuar a transformação $\delta \phi_k'' \rightarrow \delta \phi_k$, obtém-se

$$- \sum_{i,k=1}^2 \int_V (-(\sigma_{xx})_i K_z \bar{v}_k + (\sigma_{xx})_i'' \bar{u}_k) \delta \phi_k dV + \text{termos de fronteira}. \quad (3.17)$$

Considerando apenas o termo das forças interiores ($\delta W_{int} = 0$) e utilizando o Lema Fundamental do Cálculo das Variações, é-se conduzido a

$$\sum_{i,k=1}^2 \int_{\Omega} ((\sigma_{xx})_i K_z \bar{v}_k - (\sigma_{xx})_i'' \bar{u}_k) d\Omega = 0, \quad (3.18)$$

onde Ω designa a secção transversal. Esta equação pode agora ser facilmente particularizada para cada um dos termos $i, k = 1, 2$. Assim, para cada k tem-se

$$k = 1 : \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\sigma_{xx})_i'' (K_z y - 1) d\Omega = 0, \quad (3.19)$$

$$k = 2 : \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} ((\sigma_{xx})_i K_z + (\sigma_{xx})_i'' y) d\Omega = 0. \quad (3.20)$$

Na primeira equação é possível identificar os esforços axial N e momento fletor M associados ao modo i , os quais são definidos através das relações habituais

$$N_i = \int_{\Omega} (\sigma_{xx})_i d\Omega, \quad (3.21)$$

$$M_i = \int_{\Omega} -y (\sigma_{xx})_i d\Omega, \quad (3.22)$$

onde se convencionou que o momento positivo provoca K_z positivo. Assim, pode escrever-se a primeira equação (3.19) como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (-K_z M_i'' - N_i'') &= 0 \\ \Leftrightarrow N'' + \frac{M''}{R} &= 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde $N = N_1 + N_2$ e $M = M_1 + M_2$. Esta equação corresponde à formulação clássica de vigas curvas (ver, por exemplo, Armero e Valverde, 2012).

Procedendo do mesmo modo para a segunda equação (3.20), obtém-se

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 (K_z N_i - M_i'') &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{N}{R} - M'' &= 0, \end{aligned} \quad (3.24)$$

o que mais uma vez corresponde a uma das equações clássicas.

Na teoria de Winkler-Bach, as relações constitutivas na forma esforços-deslocamentos são dadas por (ver Armero e Valverde, 2012)

$$N = E\Omega u' - (E\Omega + EI_R/R^2) v/R - EI_R v''/R, \quad (3.25)$$

$$M = EI_R (v/R^2 + v''), \quad (3.26)$$

com

$$I_R = \int_{\Omega} \frac{y^2}{1 - y/R} d\Omega \quad (3.27)$$

e u e v correspondem aos deslocamentos do eixo, pelo que na notação da GBT, como $\bar{u}_1(y=0) = 1$, $\bar{v}_1(y=0) = 0$, $\bar{u}_2(y=0) = 0$ e $\bar{v}_2(y=0) = 1$, se pode escrever

$$N = E\Omega \phi_1'' - (E\Omega + EI_R/R^2) \phi_2/R - EI_R \phi_2''/R, \quad (3.28)$$

$$M = EI_R (\phi_2/R^2 + \phi_2''). \quad (3.29)$$

3.2. Esforço axial e flexão no plano da figura

Para recuperar estas equações com a GBT basta escrever, sucessivamente¹

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} (\sigma_{xx})_i d\Omega \\
 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} E (\varepsilon_{xx})_i d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} E \left(\phi_1'' - \frac{K_z \phi_2 + y \phi_2''}{1 - K_z y} \right) d\Omega \\
 &= E\Omega \phi_1'' - (E\Omega + EI_R/R^2) \phi_2/R - EI_R \phi_2''/R,
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

e

$$\begin{aligned}
 M &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} -y (\sigma_{xx})_i d\Omega \\
 &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} Ey (\varepsilon_{xx})_i d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} Ey \left(\phi_1'' - \frac{K_z \phi_2 + y \phi_2''}{1 - K_z y} \right) d\Omega \\
 &= 0 + EI_R \phi_2/R^2 + EI_R \phi_2''.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Por fim, faz-se notar que a distribuição de tensões normais na secção é dada por

$$\sigma_{xx} = \sum_{i=1}^2 E (\varepsilon_{xx})_i = E \left(\phi_1'' - \frac{K_z \phi_2 + y \phi_2''}{1 - K_z y} \right). \tag{3.32}$$

Este resultado mostra que a distribuição de tensões na secção transversal é uniforme para o modo 1² (axial), como seria de esperar, mas é não-linear para o modo 2 (flexão), em virtude do termo no denominador, $1 - K_z y$. Em acréscimo, surgem tensões que dependem de ϕ_2 (deslocamentos radiais provocam variação de comprimento das fibras longitudinais) e ϕ_2'' .

De seguida apresentam-se três exemplos concretos, comparando-se os resultados obtidos com (i) a GBT (elementos finitos), elementos 2D de 4 nós convencionais (*ADINA*) e (ii) a solução analítica de Winkler-Bach, cuja fórmula do deslocamento vertical da extremidade da consola se encontra demonstrada no Anexo A.2.

¹Nestas deduções tiveram-se em conta as seguintes igualdades (para uma demonstração detalhada, ver Anexo A.1)

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{1}{1 - K_z y} d\Omega &= \Omega + \frac{I_R}{R^2}, \\
 \int_{\Omega} \frac{y}{1 - K_z y} d\Omega &= \frac{I_R}{R}.
 \end{aligned}$$

²Note-se ainda que, o facto de o andamento longitudinal depender de ϕ_1'' e não de ϕ_1' provém do facto de, na descrição cinemática da GBT, se usar ϕ_k' para descrever os deslocamentos de empenamento u (recordar (2.87)). Assim, ϕ_1'' constante causa deslocamentos de empenamento lineares.

3.2.2 Exemplo 1 — secção retangular de parede fina

O primeiro exemplo consiste numa barra curva, com secção retangular de parede fina (uma única parede), orientada tal como ilustrado na Figura 3.3. A barra está sujeita à ação de uma carga concentrada, vertical, aplicada na extremidade livre.

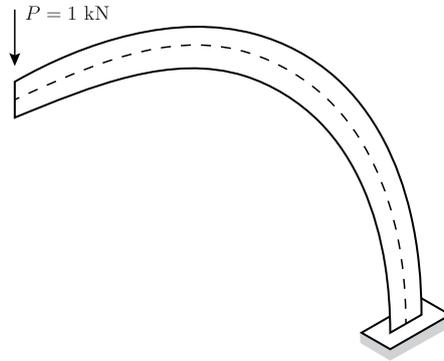


Figura 3.3: Exemplo 1: barra curva com secção retangular de parede fina.

Os modos de deformação considerados correspondem aos descritos na secção anterior, onde se mostrou que existe uma equivalência entre a presente formulação e a teoria de Winkler-Bach. Agrupando em vetores as componentes de cada modo, tem-se assim

$$\bar{\mathbf{u}} = \left[1 - \frac{y}{R} \quad y \right]^t, \quad (3.33)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \left[0 \quad -1 \right]^t, \quad (3.34)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = \left[0 \quad 0 \right]^t, \quad (3.35)$$

com a primeira entrada correspondente ao modo axial e a segunda entrada ao modo de flexão (em conformidade com os índices utilizados na Secção anterior). Na Figura 3.4 é possível observar uma representação gráfica destes modos, considerando apenas um elemento finito e com as funções de amplitude³ $\phi_1' = x$ e $\phi_2 = x$.



Figura 3.4: Exemplo 1: modos de deformação.

A solução depende fortemente da relação R/h , em que h é a altura da secção e R é o raio de curvatura do eixo, pelo que serão investigados dois valores para este parâmetro, nomeadamente $R/h = 10$ e 100 . Em ambos os casos considera-se $h = 400$ mm (logo $R = 4$ ou 40 m), $t = 10$ mm (espessura da parede), $E = 210$ GPa, $\nu = 0.3$ e $P = 1$ kN. Note-se que a presente formulação da GBT e a Teoria de Winkler-Bach não consideram a deformação por corte, pelo que não é necessário especificar o valor do módulo de distorção ($G = E/2(1 + \nu)$).

³Mais uma vez se recorda que, com a expressão (2.87), a função de amplitude para os deslocamentos segundo x é ϕ' e não ϕ , pelo que uma representação linear dos deslocamentos do modo axial é conseguida com ϕ_1' linear em x (e, portanto, ϕ_1 quadrático).

3.2. Esforço axial e flexão no plano da figura

Os resultados apresentados na Figura 3.5 dizem respeito à GBT e mostram a evolução do deslocamento com o número de elementos finitos utilizados, para $R/h = 10, 100$. Nestes gráficos, δ^{WB} representa a solução da teoria de Winkler-Bach. Os resultados mostram que, conforme seria de esperar (ver, por exemplo, Armero e Valverde, 2012), os elementos finitos baseados em aproximação de deslocamentos, necessitam de muitos mais elementos para atingir resultados satisfatórios quando $R/h = 100$. Este fenómeno resulta do chamado efeito de retenção de membrana (*membrane locking* na designação em língua inglesa), ou seja, do facto de a aproximação de deslocamentos não conseguir reproduzir um campo de deslocamentos de flexão pura (ou muito próximo disso). Naturalmente, estes efeitos são mitigados pelo facto de se estar a efetuar uma integração numérica com apenas 3 pontos segundo x , o que constitui uma integração reduzida⁴, mas ainda assim observa-se uma dificuldade em atingir resultados satisfatórios quando a rigidez de flexão da barra é muito inferior à sua rigidez axial (ou seja, quando $R/h = 100$).

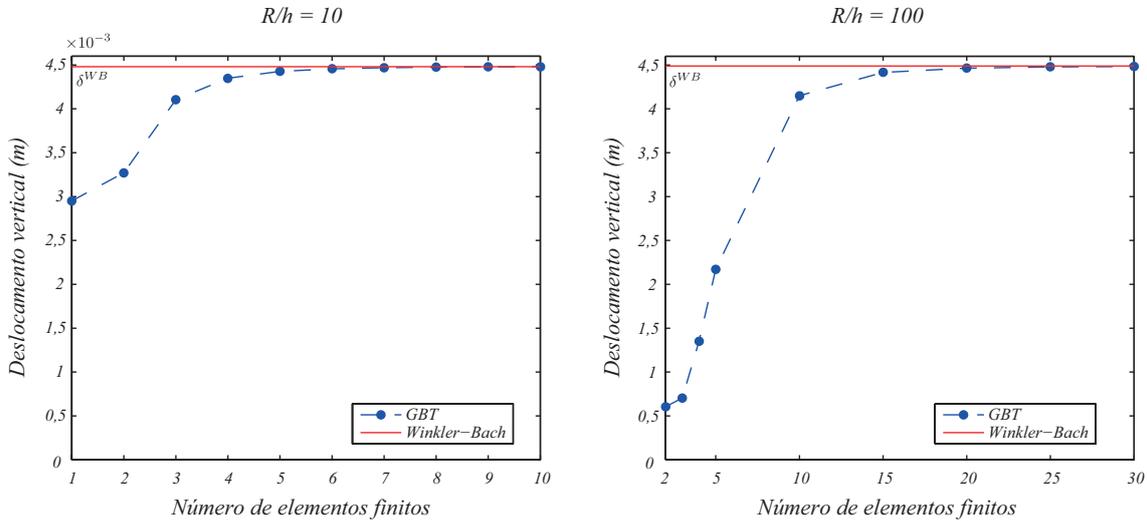


Figura 3.5: Exemplo 1: evolução do deslocamento vertical com o número de elementos finitos da GBT utilizados (δ^{WB} representa a solução da teoria de Winkler-Bach).

Na Tabela 3.1 comparam-se os valores do deslocamento vertical obtidos com (i) o programa de elementos finitos *ADINA*, utilizando modelos refinados de elementos finitos planos de 4 nós convencionais (ver Figura 3.6), (ii) a solução da teoria de Winkler-Bach (ver Anexo A.2 para a dedução da expressão do deslocamento) e (iii) a GBT, utilizando o número de elementos indicado, que corresponde a uma diferença para a teoria de Winkler-Bach igual ou inferior a 1%. Em cada caso são ainda indicados os erros relativos para a solução de elementos finitos convencionais.

Estes resultados mostram que tanto a solução de Winkler-Bach como a solução da GBT fornecem valores muito próximos dos obtidos com os modelos de elementos finitos convencionais, o que se deve ao facto de a deformação por corte não ser significativa nestes casos (valores de R/h elevados).

⁴Tendo em conta (3.16) e (3.32) e o facto de se usarem polinómios cúbicos para aproximar ϕ_2 , o termo de maior ordem na expressão do PTV é de grau 6, o que requer pelo menos 4 pontos de integração segundo x para ser integrado exatamente.

Tabela 3.1: Exemplo 1: deslocamento vertical.

R/h		ADINA	Winkler-Bach	GBT
10	Deslocamento (m)	0,004490	0,004481	0,004456 (6 EF)
	Erro relativo		0,20%	0,76%
100	Deslocamento (m)	4,485	4,488	4,443 (17 EF)
	Erro relativo		0,07%	0,94%

A Figura 3.6 mostra as configurações deformadas obtidas com a formulação proposta (considerando um número de elementos igual ao indicado na Tabela 3.1) e os modelos de elementos finitos convencionais. No caso da presente formulação para $R/h = 10$, mostra-se ainda na figura a distribuição de tensões σ_{xx} na barra. Pode observar-se que existe uma excelente concordância entre os resultados obtidos com a GBT e os elementos finitos convencionais.

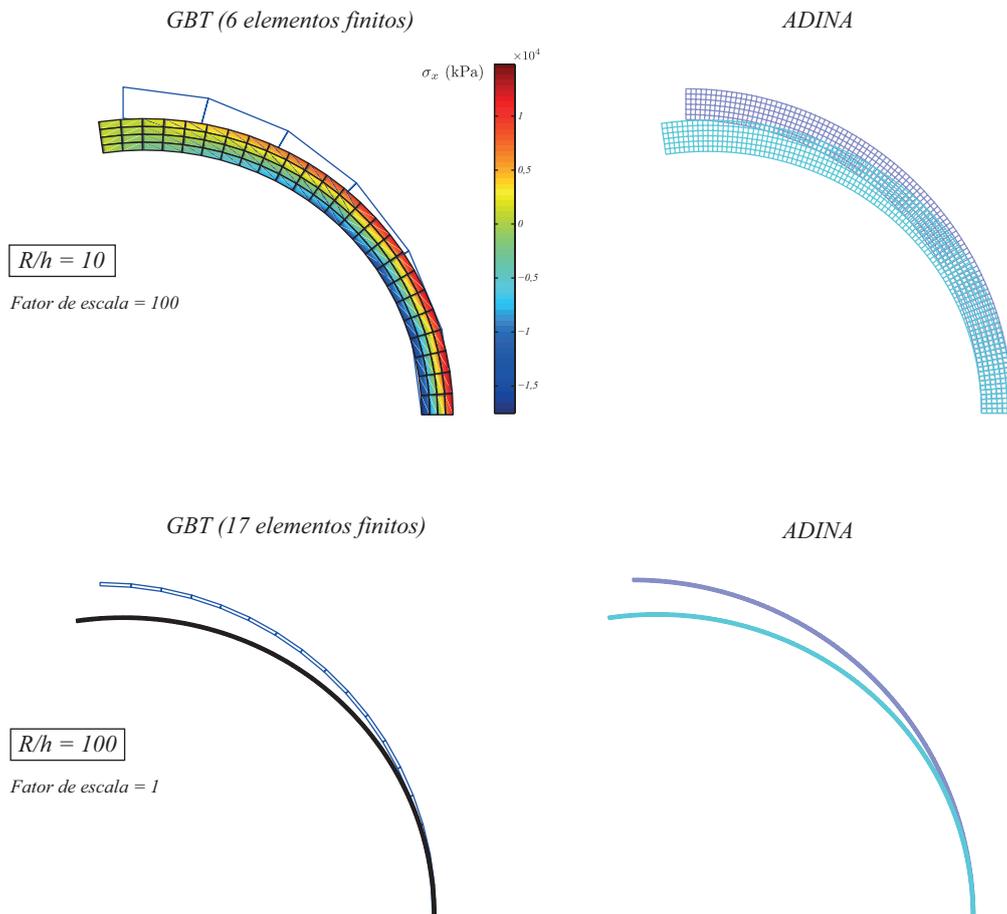


Figura 3.6: Exemplo 1: configurações deformadas obtidas com a GBT e modelos de elementos finitos convencionais de 4 nós, para $R/h = 10, 100$. No caso da GBT, para $R/h = 10$, apresentam-se as distribuições de tensões σ_{xx} .

3.2.3 Exemplo 2 — secção em I solicitada segundo o eixo forte

O segundo exemplo é semelhante ao anterior, mas considera-se agora uma secção transversal do tipo I, orientada de forma a que fique solicitada à flexão composta, com a flexão a ocorrer em torno do eixo forte, conforme mostra a Figura 3.7. Esta figura mostra a geometria do problema, nomeadamente o valor de R , as dimensões da secção transversal (a espessura t é igual em todas as paredes), os referenciais locais utilizados para definir os modos de deformação (colocados no ponto médio de cada parede) e a numeração atribuída a cada parede.

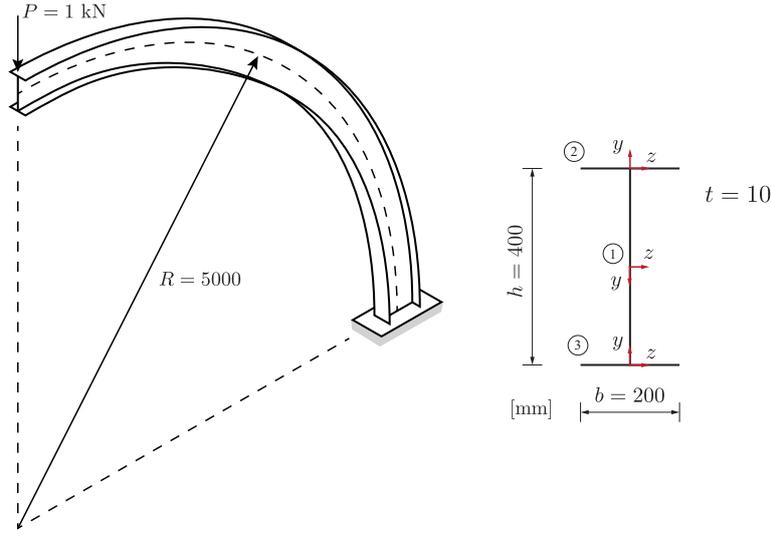


Figura 3.7: Exemplo 2: barra curva com secção em I solicitada à flexão segundo o eixo forte.

Os modos de deformação utilizados são dados pelos vetores (a primeira entrada corresponde ao modo axial e a segunda ao modo de flexão)

$$\bar{\mathbf{u}}^{P1} = \left[1 - \frac{y}{R} \quad -y\right]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P1} = [0 \quad 1]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P1} = [0 \quad 0]^t, \quad (3.36)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P2} = \left[1 + \frac{h}{2R} \quad \frac{h}{2}\right]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P2} = [0 \quad 0]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P2} = [0 \quad -1]^t, \quad (3.37)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P3} = \left[1 - \frac{h}{2R} \quad -\frac{h}{2}\right]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P3} = [0 \quad 0]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P3} = [0 \quad -1]^t. \quad (3.38)$$

Na Figura 3.8a mostra-se a configuração destes modos, considerando funções de amplitude $\phi_1' = x$ e $\phi_2 = x$.

Na Tabela 3.2 apresentam-se os valores do deslocamento vertical do ponto de aplicação da força (ponto médio da alma) obtidos com a GBT e um modelo refinado de elementos de casca de 4 nós (*ADINA*), que pode ser observado na Figura 3.8c, para além da solução de Winkler-Bach (ver Anexo A.2). No caso da GBT, foram utilizados 5 elementos de igual comprimento, que corresponde ao número mínimo de elementos necessário para obter um deslocamento que difere menos de 1% do obtido pela teoria de Winkler-Bach.

Os resultados mostram que o modelo de elementos finitos convencionais conduz a um deslocamento sensivelmente superior ao dos restantes modelos, sendo as diferenças superiores às obtidas no exemplo anterior. Esta maior diferença não pode ser explicada pela influência da deformação por esforço transversal, dado que uma análise efetuada com a consideração deste efeito não resulta numa diminuição significativa do erro.

Tabela 3.2: Exemplo 2: deslocamento vertical.

	<i>ADINA</i>	Winkler-Bach	GBT
Deslocamento (m)	0,002238	0,002188	0,002166
Erro relativo		2,2%	3,2%

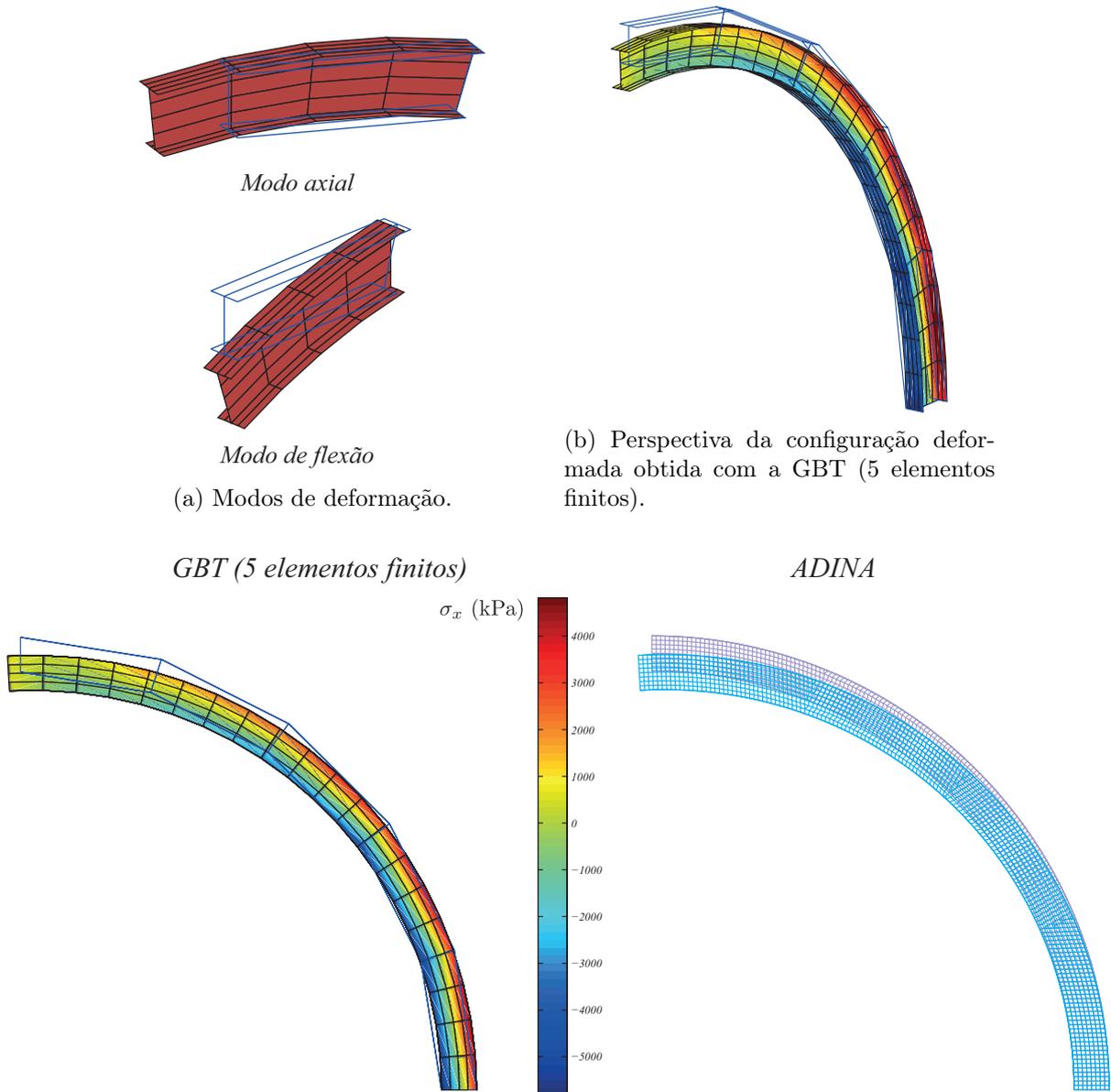


Figura 3.8: Resultados do exemplo 2.

Na Figura 3.8b representa-se uma vista em perspectiva da configuração deformada da

3.2. Esforço axial e flexão no plano da figura

peça obtida com os elementos finitos da GBT. Finalmente, na Figura 3.8c comparam-se as configurações deformadas obtidas com a GBT e um modelo de elementos finitos de casca (no caso da GBT representa-se ainda o campo de tensões σ_{xx}). Tal como seria de esperar a partir dos resultados da Tabela 3.2, existe uma excelente concordância entre os dois modelos.

3.2.4 Exemplo 3 — secção em I solicitada segundo o eixo fraco

O terceiro exemplo difere do anterior na orientação da secção, que agora se encontra solicitada à flexão em torno do eixo fraco, tal como ilustrado na Figura 3.9, onde se indicam todos os parâmetros relevantes.

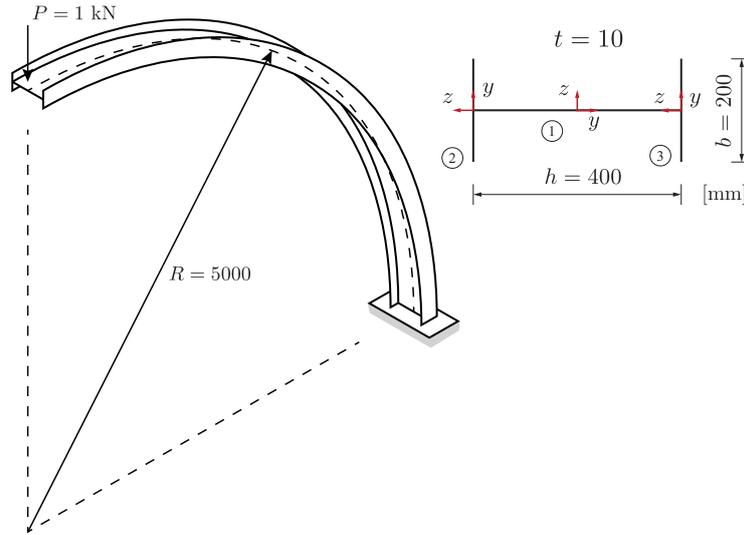


Figura 3.9: Exemplo 3: barra curva com secção em I solicitada à flexão em torno do eixo de menor inércia.

Neste caso os vetores das componentes dos modos de deformação são dados por (a primeira entrada corresponde ao modo axial e a segunda ao modo de flexão)

$$\bar{\mathbf{u}}^{P1} = [1 \ 0]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P1} = [0 \ 0]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P1} = [0 \ -1]^t, \quad (3.39)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P2} = [1 + \frac{y}{R} \ y]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P2} = [0 \ -1]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P2} = [0 \ 0]^t, \quad (3.40)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P3} = [1 + \frac{y}{R} \ y]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P3} = [0 \ -1]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P3} = [0 \ 0]^t. \quad (3.41)$$

Na Figura 3.10a apresenta-se uma representação gráfica dos modos de deformação.

Tabela 3.3: Exemplo 3: deslocamento vertical.

	<i>ADINA</i>	Winkler-Bach	GBT
Deslocamento (m)	0,03531	0,03497	0,03470
Erro relativo		0,96%	1,73%

A Tabela 3.3 mostra os valores do deslocamento vertical do ponto de aplicação da força obtidos com o modelo refinado de elementos de casca de 4 nós (*ADINA*) da Figura 3.10c, a solução de Winkler-Bach (ver Anexo A.2) e a GBT, utilizando 10 elementos de igual comprimento (número mínimo necessário para obter um deslocamento que difere menos de 1% do da

teoria de Winkler-Bach). Em relação ao exemplo anterior (ver Tabela 3.2), o presente exemplo corresponde a um valor de R/h mais elevado ⁵ e, naturalmente, as diferenças entre o modelo de elementos de casca e a solução de Winkler-Bach (e da GBT) são menores. Por outro lado, note-se que no presente exemplo existe a necessidade de considerar mais elementos finitos da GBT para obter um resultado preciso (10 em vez de 5), o que também está de acordo com o facto de neste exemplo se ter um valor de R/h mais elevado.

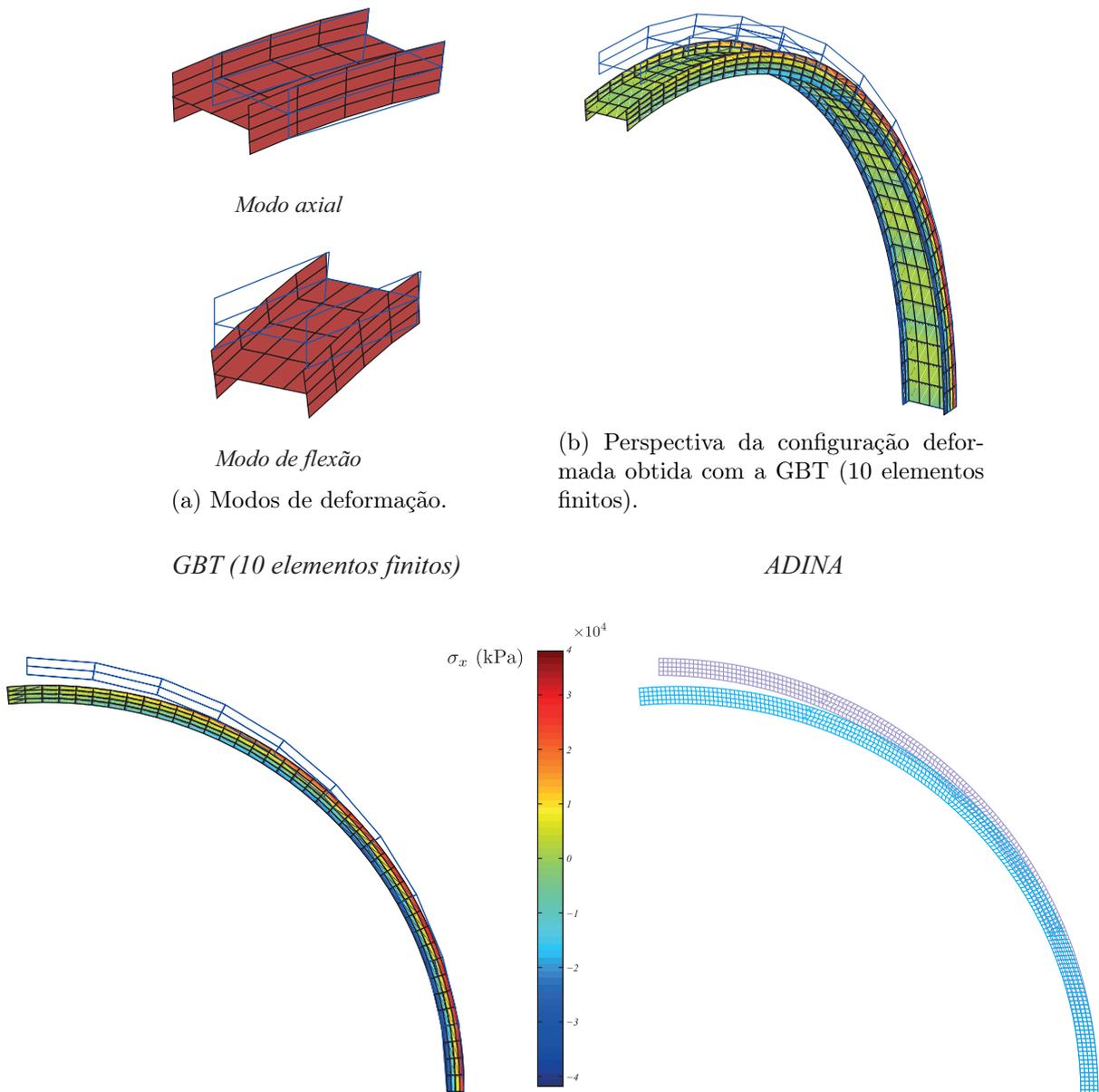


Figura 3.10: Resultados do exemplo 3.

⁵Neste caso h não corresponde à altura da alma, mas antes à largura do banzo.

À semelhança do exemplo anterior, a Figura 3.10b mostra uma vista em perspectiva da configuração deformada da barra obtida com a GBT e a Figura 3.10c permite comparar as configurações deformadas obtidas com a GBT e o modelo de elementos finitos de casca. Tal como nos exemplos anteriores, no caso da GBT representa-se o campo de tensões σ_{xx} . Mais uma vez, observa-se uma excelente concordância entre os dois modelos.

3.3 Torção e flexão fora do plano da figura

3.3.1 A Teoria de Vlasov

No caso de peças curvas de eixo plano, sujeitas à flexão para fora do plano, surge um acoplamento entre a flexão e a torção, em virtude da curvatura da peça. Este caso particular foi bastante analisado no passado, dada a sua relevância na análise de pontes curvas em planta, sob a ação de cargas verticais.

A solução de Vlasov (1958) para secções abertas⁶ com dupla simetria (o centro de corte coincide com o centróide) e sem cargas distribuídas é dada pelo sistema de equações diferenciais (ver, por exemplo, El-Amin e Kasem, 1978)

$$\left(EI + \frac{EI_w}{R^2}\right) w'''' - \frac{GJ}{R^2} w'' - \frac{EI + GJ}{R} \theta'' + \frac{EI_w}{R} \theta'''' = 0, \quad (3.42)$$

$$\frac{EI_w}{R} w'''' - \frac{EI + GJ}{R} w'' + \frac{EI}{R^2} \theta - GJ\theta'' + EI_w \theta'''' = 0, \quad (3.43)$$

onde w é o deslocamento do centro de corte, θ é o ângulo de torção e as propriedades da secção intervenientes são idênticas às das peças retas: (i) o momento de inércia em torno do eixo de flexão relevante I , (ii) a constante de empenamento para a torção I_w e (iii) o fator de rigidez à torção J .

Em vez de resolver estas equações, pode recorrer-se ao método dos elementos finitos, aproximando diretamente as funções w e θ na forma variacional das equações de equilíbrio. No Anexo B explicam-se os detalhes do elemento implementado e utilizado. Por agora refere-se apenas que utilizaram-se funções de aproximação de Hermite, que as equações são estabelecidas recorrendo ao princípio da estacionaridade da energia potencial e que a energia de deformação elástica é dada por (e.g., El-Amin e Kasem, 1978)

$$\mathcal{U} = \frac{EI}{2} \int_L \left(w'' - \frac{\theta}{R}\right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_L \left(\frac{w'}{R} + \theta'\right)^2 dx + \frac{EI_w}{2} \int_L \left(\frac{w''}{R} + \theta''\right)^2 dx. \quad (3.44)$$

No que se segue, este elemento finito é designado de “elemento de Vlasov”.

3.3.2 Secção retangular de parede fina — comparação com a teoria de Vlasov

Começa-se por analisar uma barra curva com secção transversal retangular de parede fina, tal como no exemplo 1, muito embora o carregamento considerado seja agora constituído por uma única força, horizontal, aplicada no centro de gravidade da secção, a qual provoca flexão para fora do plano de curvatura e torção. A geometria do problema é indicada na Figura 3.11.

⁶Uma discussão do caso de secções fechadas pode ser encontrada no artigo de Fu e Hsu (1995).

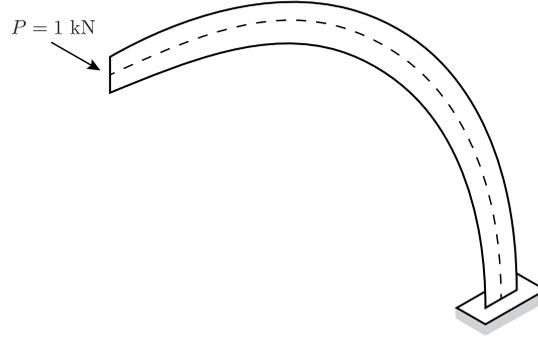


Figura 3.11: Exemplo 4: barra curva com seção retangular de parede fina.

Os modos de deformação utilizados correspondem a flexão (para fora do plano, modo 1) e torção (modo 2), e os vetores das componentes são dados por

$$\bar{\mathbf{u}} = [0 \quad 0]^t, \quad (3.45)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = [0 \quad 0]^t, \quad (3.46)$$

$$\bar{\mathbf{w}} = [1 \quad y]^t. \quad (3.47)$$

A Figura 3.12 ilustra a configuração destes modos (considerando funções de amplitude lineares).

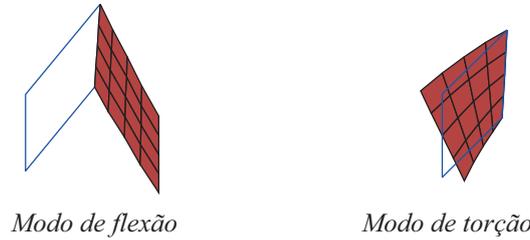


Figura 3.12: Modos de deformação.

Tal como no exemplo 1, tem-se $K_y = 0$, $K_z = 1/R$ e $\Gamma_A = 0$. No entanto, as componentes de deformação não-nulas são agora $(\varepsilon_{xx})^F$ e $(\gamma_{xy})^F$, as quais, sendo componentes de flexão, são obtidas a partir de diferentes expressões caso se opte pela formulação simplificada ou refinada. Assim, para a formulação simplificada, a partir de (2.82)-(2.86), tem-se, para o modo k ,

$$(\varepsilon_{xx})_k = (\varepsilon_{xx}^F)_k = -z\beta (-K_z \bar{w}_{k,y} \phi_k + \bar{w}_k \phi_k''), \quad (3.48)$$

$$(\gamma_{xy})_k = (\gamma_{xy}^F)_k = -2z\bar{w}_{k,y} \phi_k', \quad (3.49)$$

com

$$\beta = \frac{1}{1 - K_z y}. \quad (3.50)$$

Para a formulação refinada, a partir de (2.98)-(2.103),

$$(\varepsilon_{xx})_k = (\varepsilon_{xx}^F)_k = -z\beta (-K_z \bar{w}_{k,y} \phi_k + \beta \bar{w}_k \phi_k''), \quad (3.51)$$

$$(\gamma_{xy})_k = (\gamma_{xy}^F)_k = -z\beta (2\beta K_z \bar{w}_k + 2\bar{w}_{k,y}) \phi_k', \quad (3.52)$$

3.3. Torção e flexão fora do plano da figura

e a expressão de β coincide com a anterior.

Para obter a forma homogénea das equações de equilíbrio, escritas apenas em termos dos modos de deformação (tal como as equações (3.42)-(3.43) de Vlasov), torna-se necessário simplificar a expressão da variação virtual do trabalho das forças interiores, que é agora dada por

$$\begin{aligned}\delta W_{int} &= - \int_V (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{xy} \delta \gamma_{xy}) J_0 dV \\ &= - \sum_{i,k=1}^2 \int_V (E(\varepsilon_{xx})_i (\delta \varepsilon_{xx})_k + G(\gamma_{xy})_i (\delta \gamma_{xy})_k) J_0 dV.\end{aligned}\quad (3.53)$$

Começando pela formulação simplificada, a passagem das derivadas de $\delta \phi$ para ϕ das expressões a integrar fornece os seguintes termos (a menos dos termos de fronteira)

$$\begin{aligned}\int_V E(\varepsilon_{xx})_k (\delta \varepsilon_{xx})_i J_0 dV &= \int_V z^2 \beta E (-K_z \bar{w}_{k,y} \phi_k + \bar{w}_k \phi_k'') (-K_z \bar{w}_{i,y} \delta \phi_i + \bar{w}_i \delta \phi_i'') dV \\ &= \int_V z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{k,y} \bar{w}_{i,y} \phi_k - K_z (\bar{w}_{k,y} \bar{w}_i + \bar{w}_k \bar{w}_{i,y}) \phi_k'' + \bar{w}_k \bar{w}_i \phi_k''') \delta \phi_i dV,\end{aligned}\quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}\int_V G(\gamma_{xy})_k (\delta \gamma_{xy})_i J_0 dV &= \int_V \frac{4z^2 G}{\beta} \bar{w}_{k,y} \phi_k' \bar{w}_{i,y} \delta \phi_i' dV \\ &= - \int_V \frac{4z^2 G}{\beta} \bar{w}_{k,y} \phi_k'' \bar{w}_{i,y} \delta \phi_i dV\end{aligned}\quad (3.55)$$

Os vários termos i, j da equação de equilíbrio podem agora ser mais facilmente obtidos aplicando o lema fundamental do cálculo das variações e integrando na secção transversal Ω . Para isso, utilizam-se as propriedades da secção que se indicam de seguida, as quais são válidas apenas para uma secção retangular de parede fina de largura h e espessura t

$$I = \int_{\Omega} z^2 d\Omega = \frac{ht^3}{12}, \quad (3.56)$$

$$J = \frac{ht^3}{3} = 4I, \quad (3.57)$$

$$I_w = \int_{\Omega} (zy)^2 d\Omega = \frac{h^3 t^3}{144}, \quad (3.58)$$

$$\int_{\Omega} \beta z^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{z^2}{1-y/R} d\Omega = \frac{ht^3}{12} + \frac{h^3 t^3}{144R^2} + O(K_z^4) \approx I + \frac{I_w}{R^2}, \quad (3.59)$$

$$\int_{\Omega} \beta z^2 y d\Omega = \int_{\Omega} \frac{z^2 y}{1-y/R} d\Omega = \frac{h^3 t^3}{144R} + O(K_z^3) \approx \frac{I_w}{R}, \quad (3.60)$$

$$\int_{\Omega} \beta z^2 y^2 d\Omega = \int_{\Omega} \frac{z^2 y^2}{1-y/R} d\Omega = \frac{h^3 t^3}{144} + \frac{h^5 t^3}{960R^2} + O(K_z^4) \approx I_w, \quad (3.61)$$

e no último integral desprezou-se um termo em K_z^2 . Assim, tendo em conta as componentes dos modos de deformação (3.45)-(3.47), procede-se à determinação dos vários termos associados a (3.54) e (3.55), designados de T1 e T2, respetivamente, desprezando os termos com K_z^3 e

de ordem superior. Para $k, i = 1$ tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{1,y} \bar{w}_{1,y} \phi_1 - K_z (\bar{w}_{1,y} \bar{w}_1 + \bar{w}_1 \bar{w}_{1,y}) \phi_1'' + \bar{w}_1 \bar{w}_1 \phi_1'''') \delta \phi_1 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} z^2 \beta E \phi_1'''' \delta \phi_1 d\Omega \\
 &\approx \left(EI + \frac{EI_w}{R^2} \right) \phi_1'''' \delta \phi_1,
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\text{T2} \Rightarrow - \int_{\Omega} \frac{4z^2 G}{\beta} \bar{w}_{1,y} \phi_1'' \bar{w}_{1,y} \delta \phi_1 d\Omega = 0. \tag{3.63}$$

Para $k = 1$ e $i = 2$,

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{1,y} \bar{w}_{2,y} \phi_1 - K_z (\bar{w}_{1,y} \bar{w}_2 + \bar{w}_1 \bar{w}_{2,y}) \phi_1'' + \bar{w}_1 \bar{w}_2 \phi_1'''') \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} (-z^2 \beta K_z E \phi_1'' + z^2 y \beta E \phi_1'''') \delta \phi_2 d\Omega \\
 &\approx \left(-\frac{EI}{R} \phi_1'' + \frac{EI_w}{R} \phi_1'''' \right) \delta \phi_2,
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\text{T2} \Rightarrow - \int_{\Omega} \frac{4z^2 G}{\beta} \bar{w}_{1,y} \phi_1'' \bar{w}_{2,y} \delta \phi_2 d\Omega = 0. \tag{3.65}$$

Para $k = 2$ e $i = 1$,

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{2,y} \bar{w}_{1,y} \phi_2 - K_z (\bar{w}_{2,y} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \bar{w}_{1,y}) \phi_2'' + \bar{w}_2 \bar{w}_1 \phi_2'''') \delta \phi_1 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} (-z^2 \beta K_z E \phi_2'' + z^2 y \beta E \phi_2'''') \delta \phi_1 d\Omega \\
 &\approx \left(-\frac{EI}{R} \phi_2'' + \frac{EI_w}{R} \phi_2'''' \right) \delta \phi_1,
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\text{T2} \Rightarrow - \int_{\Omega} \frac{4z^2 G}{\beta} \bar{w}_{2,y} \phi_2'' \bar{w}_{1,y} \delta \phi_1 d\Omega = 0. \tag{3.67}$$

Finalmente, para $k = 2$ e $i = 2$,

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{2,y}^2 \phi_2 - 2K_z \bar{w}_{2,y} \bar{w}_2 \phi_2'' + \bar{w}_2^2 \phi_2'''') \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \phi_2 - 2K_z y \phi_2'' + y^2 \phi_2'''') \delta \phi_2 d\Omega \\
 &\approx \left(-\frac{2EI_w}{R^2} \phi_2'' + EI_w \phi_2'''' \right) \delta \phi_2,
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\begin{aligned}
 \text{T2} &\Rightarrow - \int_{\Omega} \frac{4z^2 G}{\beta} \bar{w}_{2,y}^2 \phi_2'' \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} 4z^2 G (1 - K_z y) \phi_2'' \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= -4GI \phi_2'' \delta \phi_2 \\
 &= -GJ \phi_2'' \delta \phi_2.
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

3.3. Torção e flexão fora do plano da figura

Finalmente, as equações correspondem a (i) $\delta\phi_1 = 1$ e $\delta\phi_2 = 0$ e (ii) $\delta\phi_1 = 0$ e $\delta\phi_2 = 1$, obtendo-se

$$\left(EI + \frac{EI_w}{R^2}\right) \phi_1'''' - \frac{EI}{R} \phi_2'' + \frac{EI_w}{R} \phi_2'''' = 0, \quad (3.70)$$

$$\frac{EI_w}{R} \phi_1'''' - \frac{EI}{R} \phi_1'' - \frac{2EI_w}{R^2} \phi_2'' - GJ \phi_2'' + EI_w \phi_2'''' = 0. \quad (3.71)$$

É possível comparar diretamente estas equações com as de Vlasov (3.42)-(3.43), dado que se tem $\phi_1 = w$ e $\phi_2 = \theta$. Dessa comparação conclui-se que faltam vários termos na formulação da GBT e que, por outro lado, o termo sublinhado na equação (3.71) não existe na teoria de Vlasov.

Considere-se agora a formulação refinada. Neste caso a passagem das derivadas de $\delta\phi$ para ϕ das expressões a integrar conduz aos seguintes termos (excluem-se os termos de fronteira)

$$\begin{aligned} \int_V E(\varepsilon_{xx})_k (\delta\varepsilon_{xx})_i J_0 dV &= \\ &= \int_V z^2 \beta E (-K_z \bar{w}_{k,y} \phi_k + \beta \bar{w}_k \phi_k'') (-K_z \bar{w}_{i,y} \delta\phi_i + \beta \bar{w}_i \phi_i'') dV \\ &= \int_V z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{k,y} \bar{w}_{i,y} \phi_k - \beta K_z (\bar{w}_{k,y} \bar{w}_i + \bar{w}_k \bar{w}_{i,y}) \phi_k'' + \beta^2 \bar{w}_k \bar{w}_i \phi_k''') \delta\phi_i dV, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \int_V G(\gamma_{xy})_k (\delta\gamma_{xy})_i J_0 dV &= \int_V 4z^2 \beta G (\beta K_z \bar{w}_k + \bar{w}_{k,y}) \phi_k' (\beta K_z \bar{w}_i + \bar{w}_{i,y}) \delta\phi_i' dV \\ &= - \int_V 4z^2 \beta G (\beta K_z \bar{w}_k + \bar{w}_{k,y}) \phi_k'' (\beta K_z \bar{w}_i + \bar{w}_{i,y}) \delta\phi_i dV. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Os termos T1 e T2 são agora dados por (3.72) e (3.73), respetivamente. Para além das propriedades da secção definidas anteriormente, tem-se agora

$$\int_{\Omega} \beta^2 z^2 d\Omega = \frac{ht^3}{12} + \frac{h^3 t^3}{48R^2} + O(K_z^4) \approx I + \frac{3I_w}{R^2}, \quad (3.74)$$

$$\int_{\Omega} \beta^2 z^2 y d\Omega = \frac{h^3 t^3}{72R} + O(K_z^3) \approx \frac{2I_w}{R}, \quad (3.75)$$

$$\int_{\Omega} \beta^3 z^2 d\Omega = \frac{ht^3}{12} + \frac{h^3 t^3}{24R^2} + O(K_z^4) \approx I + \frac{6I_w}{R^2}, \quad (3.76)$$

$$\int_{\Omega} \beta^3 z^2 y d\Omega = \frac{h^3 t^3}{48R} + O(K_z^3) \approx \frac{3I_w}{R}, \quad (3.77)$$

$$\int_{\Omega} \beta^3 z^2 y^2 d\Omega = \frac{h^3 t^3}{144} + \frac{h^5 t^3}{160R^2} + O(K_z^4) \approx I_w, \quad (3.78)$$

onde se desprezou o termo em K_z^2 na última expressão. Desprezando os termos com K_z^3 e de

ordem superior, tem-se para $k, i = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{1,y}^2 \phi_1 - 2\beta K_z \bar{w}_{1,y} \bar{w}_1 \phi_1'' + \beta^2 \bar{w}_1^2 \phi_1'''') \delta \phi_1 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} z^2 \beta^3 E \phi_1'''' \delta \phi_1 d\Omega \\
 &\approx E \left(I + \frac{6I_w}{R^2} \right) \phi_1'''' \delta \phi_1, \tag{3.79}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{T2} &\Rightarrow - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G (\beta K_z \bar{w}_1 + \bar{w}_{1,y})^2 \phi_1'' \delta \phi_1 d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} 4z^2 \beta^3 G K_z^2 \phi_1'' \delta \phi_1 d\Omega \\
 &\approx - \frac{4GI}{R^2} \phi_1'' \delta \phi_1. \tag{3.80}
 \end{aligned}$$

Para $k = 1$ e $i = 2$,

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{1,y} \bar{w}_{2,y} \phi_1 - \beta K_z (\bar{w}_{1,y} \bar{w}_2 + \bar{w}_1 \bar{w}_{2,y}) \phi_1'' + \beta^2 \bar{w}_1 \bar{w}_2 \phi_1'''') \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} z^2 \beta E (-\beta K_z \phi_1'' + \beta^2 y \phi_1'''') \delta \phi_2 d\Omega \\
 &\approx \left(-\frac{EI}{R} \phi_1'' + \frac{3EI_w}{R} \phi_1'''' \right) \delta \phi_2, \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{T2} &\Rightarrow - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G (\beta K_z \bar{w}_1 + \bar{w}_{1,y}) \phi_1'' (\beta K_z \bar{w}_2 + \bar{w}_{2,y}) \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G K_z \phi_1'' (\beta K_z y + 1) \delta \phi_2 d\Omega \\
 &\approx - \frac{4GI}{R} \phi_1'' \delta \phi_2. \tag{3.82}
 \end{aligned}$$

Para $k = 2$ e $i = 1$,

$$\begin{aligned}
 \text{T1} &\Rightarrow \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{2,y} \bar{w}_{1,y} \phi_2 - \beta K_z (\bar{w}_{2,y} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 \bar{w}_{1,y}) \phi_2'' + \beta^2 \bar{w}_2 \bar{w}_1 \phi_2'''') \delta \phi_1 d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} z^2 \beta E (-\beta K_z \phi_2'' + \beta^2 y \phi_2'''') \delta \phi_1 d\Omega \\
 &\approx \left(-\frac{EI}{R} \phi_2'' + \frac{3EI_w}{R} \phi_2'''' \right) \delta \phi_1, \tag{3.83}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{T2} &\Rightarrow - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G (\beta K_z \bar{w}_1 + \bar{w}_{1,y}) \phi_1'' (\beta K_z \bar{w}_2 + \bar{w}_{2,y}) \delta \phi_2 d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G (\beta K_z y + 1) \phi_1'' \beta K_z \delta \phi_2 d\Omega \\
 &\approx - \frac{4GI}{R} \phi_2'' \delta \phi_1. \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

Finalmente, para $k = 2$ e $i = 2$,

$$\begin{aligned} \text{T1} \Rightarrow & \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \bar{w}_{2,y}^2 \phi_2 - 2\beta K_z \bar{w}_{2,y} \bar{w}_2 \phi_2'' + \beta^2 \bar{w}_2^2 \phi_2'''') \delta \phi_2 d\Omega \\ & = \int_{\Omega} z^2 \beta E (K_z^2 \phi_2 - 2\beta K_z y \phi_2'' + \beta^2 y^2 \phi_2'''') \delta \phi_2 d\Omega \\ & \approx \left(\frac{EI}{R^2} \phi_2 - \frac{4EI_w}{R^2} \phi_2'' + EI_w \phi_2'''' \right) \delta \phi_2, \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} \text{T2} \Rightarrow & - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G (\beta K_z \bar{w}_2 + \bar{w}_{2,y})^2 \phi_2'' \delta \phi_2 d\Omega \\ & = - \int_{\Omega} 4z^2 \beta G (\beta K_z y + 1)^2 \phi_2'' \delta \phi_2 d\Omega \\ & \approx \left(-\frac{24GI_w}{R^2} - 4GI \right) \phi_2'' \delta \phi_2. \end{aligned} \quad (3.86)$$

Com os resultados anteriores, tendo em conta que $4GI = GJ$, as equações diferenciais de equilíbrio são

$$E \left(I + \frac{6I_w}{R^2} \right) \phi_1'''' - \frac{GJ}{R^2} \phi_1'' - \frac{EI + GJ}{R} \phi_2'' + \frac{3EI_w}{R} \phi_2'''' = 0, \quad (3.87)$$

$$\frac{3EI_w}{R} \phi_1'''' - \frac{EI + GJ}{R} \phi_1'' + \frac{EI}{R^2} \phi_2 - GJ \phi_2'' + EI_w \phi_2'''' - \frac{4EI_w + 24GI_w}{R^2} \phi_2'' = 0. \quad (3.88)$$

Ao contrário do que sucede no caso da formulação simplificada da GBT, estas equações são bastante semelhantes às de Vlasov (3.42)-(3.43) (com $\phi_1 = w$ e $\phi_2 = \theta$). Existem quatro termos diferentes, os quais se encontram sublinhados. Três das diferenças correspondem a coeficientes multiplicativos da constante de empenamento e podem ter efeitos desprezáveis em secções com empenamento de membrana ⁷. A quarta diferença consiste na presença de um termo novo.

Por fim, recorda-se que se mostrou na Secção 2.4.3 que a formulação refinada da GBT corresponde à do MFF, com uma única diferença no coeficiente de um dos termos de γ_{xy}^F (recordar (2.101) e (2.120)). No entanto, este termo depende de $\bar{u}_{k,y}$ e portanto é nulo para uma secção constituída por uma única parede. Assim, no presente exemplo, considerando os mesmos graus de liberdade (modos de deformação no caso da GBT), a solução do MFF é idêntica à da GBT.

3.3.3 Exemplo 4 — secção retangular de parede fina

Considera-se o caso particular de $h = 400$ mm, $t = 10$ mm, $R = 5$ m, $E = 210$ GPa e $\nu = 0.3$. A geometria do problema é fornecida na Figura 3.11 e os modos de deformação são representados na Figura 3.12.

Na Figura 3.14 comparam-se os valores do deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga obtidos com (i) o programa de elementos finitos *ADINA*, utilizando modelos refinados de elementos finitos de casca de 4 nós convencionais (ver Figura 3.13), (ii) o elemento de Vlasov

⁷O empenamento de membrana envolve deslocamentos segundo x (de empenamento) da linha média das paredes, como sucede no caso da secção em I. Como no presente exemplo se está a considerar uma única parede, a função de empenamento é dada por yz e, conseqüentemente, é nula na linha média ($z = 0$). Em virtude desta característica, este tipo de empenamento é designado de “secundário” ou, na linguagem da GBT, “de flexão” (por oposição ao empenamento de membrana).

e (iii) a GBT (modelo simplificado e modelo refinado), sendo que no caso dos elementos de barra (Vlasov e GBT) se varia o número de elementos. A Tabela 3.4 mostra os valores para a máxima discretização utilizada e indicam-se as diferenças para a solução de elementos finitos convencionais.

Estes resultados mostram que tanto a solução de Vlasov como a solução do modelo refinado da GBT fornecem valores muito próximos dos obtidos com os modelos finitos convencionais. Note-se que o modelo simplificado da GBT apresenta diferenças muito significativas relativamente às restantes soluções. Por outro lado, note-se que os elementos finitos da GBT fornecem resultados aceitáveis com discretizações com apenas 1 elemento.

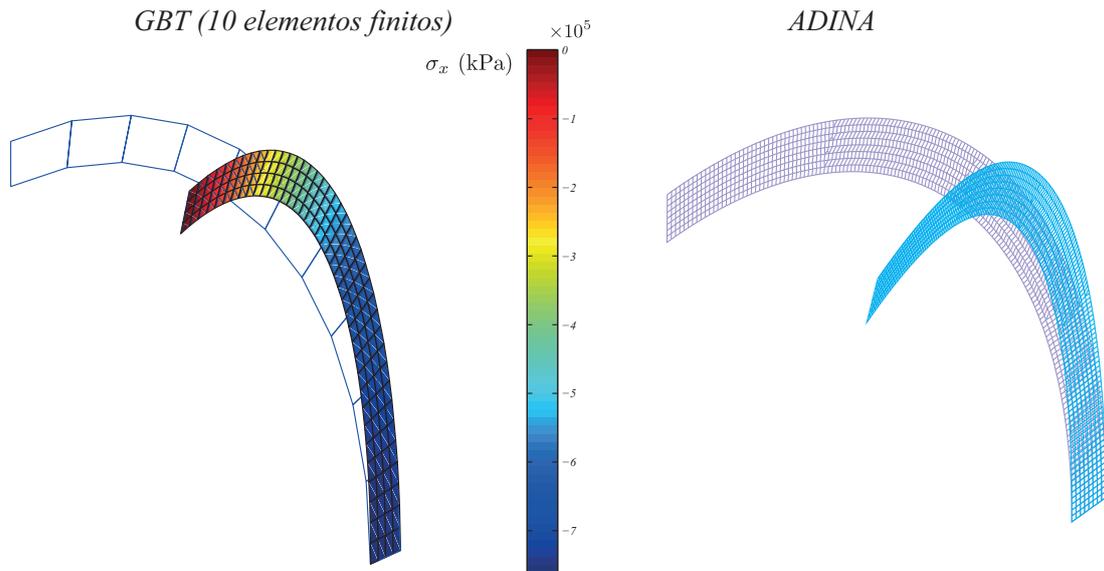


Figura 3.13: Configurações deformadas obtidas com a GBT e um modelo de elementos finitos de casca (fator de escala = 0.1). No caso da GBT, apresentam-se as distribuições de tensões σ_{xx} .

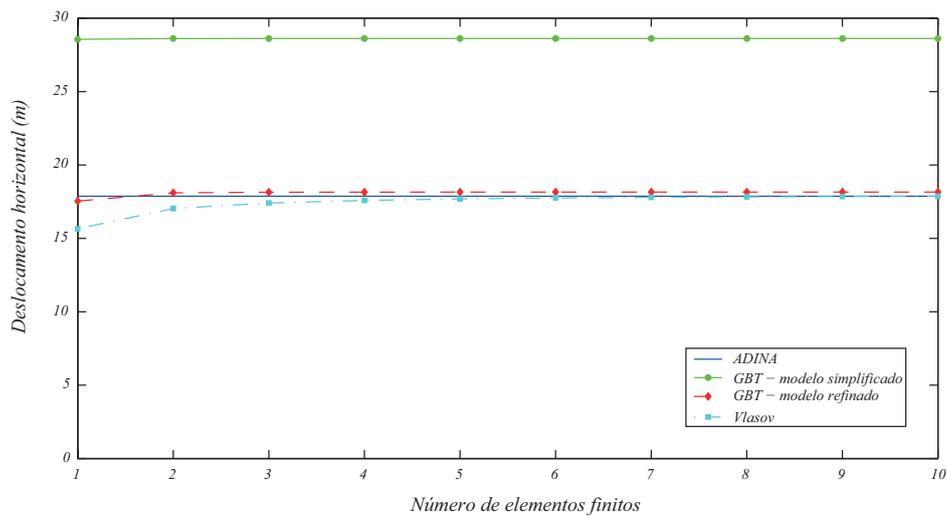


Figura 3.14: Exemplo 4: evolução do deslocamento horizontal com o número de elementos finitos utilizados.

3.3. Torção e flexão fora do plano da figura

Tabela 3.4: Exemplo 4: deslocamento horizontal.

	<i>ADINA</i>	Vlasov	GBT (simplificado)	GBT (refinado)
Deslocamento (m)	17,875	17,869 (10 EF)	28,619 (10 EF)	18,155 (10 EF)
Erro relativo		0,03%	-60,11%	-1,56%

A Figura 3.13 mostra as configurações deformadas obtidas com a formulação refinada proposta (considerando um número de elementos igual ao indicado na Tabela 3.4) e o modelo de elementos finitos convencionais, observando-se uma muito boa concordância. A figura mostra ainda, para o caso da solução da GBT, a distribuição de tensões σ_{xx} na barra.

3.3.4 Exemplo 5 — secção em I solicitada segundo o eixo fraco

Neste exemplo considera-se uma secção transversal do tipo I, orientada de forma a que fique solicitada à flexão em torno do eixo fraco e torção, conforme mostra a Figura 3.15. Esta figura fornece a geometria do problema, nomeadamente o valor de R , as dimensões da secção transversal (a espessura t é igual em todas as paredes), os referenciais locais utilizados para definir os modos de deformação (colocados no ponto médio de cada parede) e a numeração atribuída a cada parede.

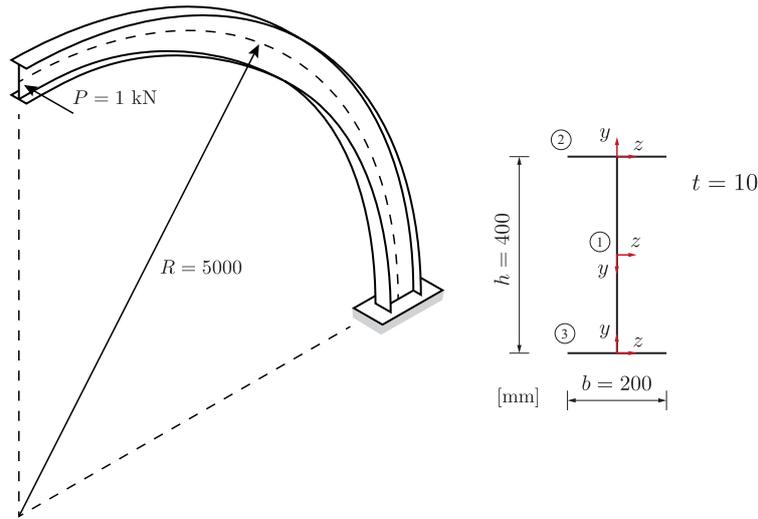


Figura 3.15: Exemplo 5: barra curva com secção em I solicitada à flexão segundo o eixo fraco.

Os vetores das componentes dos modos de deformação utilizados são dados por (a primeira entrada corresponde ao modo de flexão e a segunda ao modo de torção)

$$\bar{\mathbf{u}}^{P1} = [0 \quad 0]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P1} = [0 \quad 0]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P1} = \left[-1 + \frac{y}{R} \quad y - \frac{1}{4} \frac{h^2}{R} \right]^t, \quad (3.89)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P2} = [y \quad \frac{h}{2}y]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P2} = \left[-\left(1 + \frac{h}{2R}\right) \quad -\frac{h}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{h}{R}\right) \right]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P2} = \left[\frac{y}{R} \quad y \right]^t, \quad (3.90)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P3} = [y \quad -\frac{h}{2}y]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P3} = \left[-\left(1 - \frac{h}{2R}\right) \quad \frac{h}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{R}\right) \right]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P3} = \left[\frac{y}{R} \quad y \right]^t, \quad (3.91)$$

e encontram-se ilustrados na Figura 3.17a.

Na Figura 3.16 apresenta-se a variação do deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força (ponto médio da alma) com o número de elementos finitos utilizados, para quatro

Capítulo 3. Aplicações

formulações distintas: Vlasov, GBT simplificada, GBT refinada e GBT-MFF, que corresponde a adotar as componentes de deformação exatas do MFF. Para além disso, mostra-se o resultado obtido com o modelo de elementos finitos de casca de 4 nós (*ADINA*) que se representa na Figura 3.17b. Na Tabela 3.5 apresentam-se os valores do deslocamento para o número máximo de elementos adotados e as diferenças em relação à solução de elementos finitos convencionais.

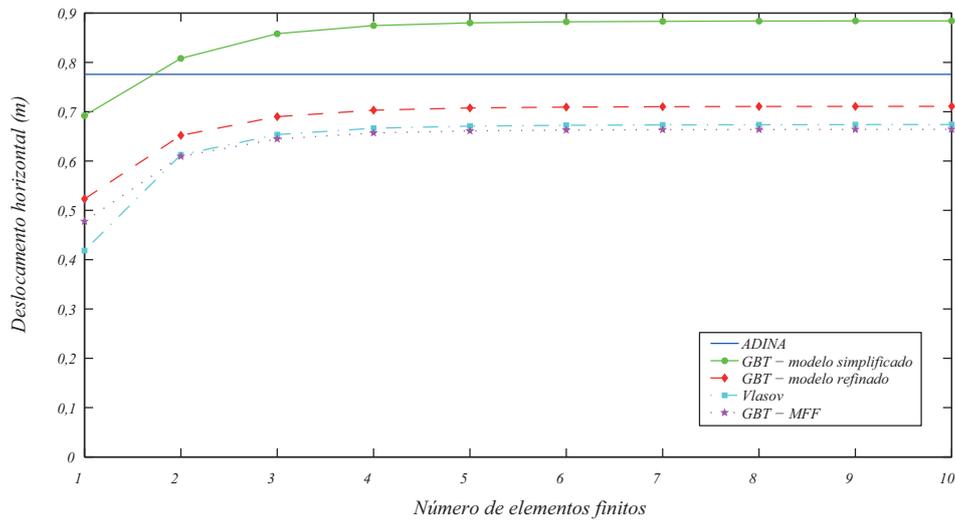


Figura 3.16: Exemplo 5: evolução do deslocamento horizontal com o número de elementos finitos utilizados.

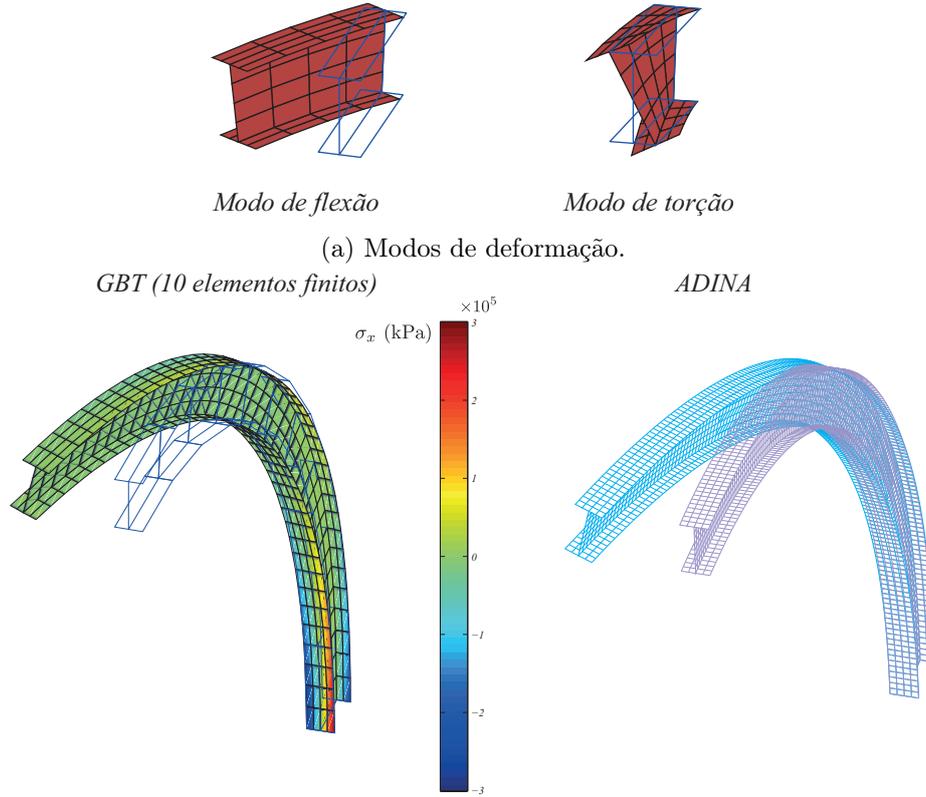
Os resultados permitem concluir que as diferenças para a solução obtida com o modelo de elementos finitos convencionais são agora significativas. O modelo refinado da GBT é o que se aproxima mais da referida solução e note-se que tanto a solução de Vlasov como a do modelo da GBT baseado no MFF fornecem resultados de qualidade bastante inferior, o que é algo surpreendente. Efetuaram-se ainda análises onde se introduziram modos de deformação por corte associados aos modos de flexão e torção. No entanto, a introdução destes modos provoca uma diminuição do erro em 0,25%, concluindo-se que a sua influência na solução final não é significativa. Salienta-se ainda que em todos os casos são necessários pelo menos 5 elementos para que a solução se aproxime da que se obtém com o maior refinamento.

Tabela 3.5: Exemplo 5: deslocamento horizontal.

	<i>ADINA</i>	Vlasov	GBT (simplificado)	GBT (refinado)	GBT (MFF)
Deslocamento (m)	0,776	0,674	0,884	0,711	0,664
Erro relativo		13,14%	-13,92%	8,38%	14,43%

Por fim, a Figura 3.17b permite comparar as configurações deformadas obtidas com a formulação refinada da GBT (considerando 10 elementos) e o modelo de elementos finitos convencionais. Apesar das diferenças registadas na Tabela 3.5, conclui-se que existe uma boa concordância. Mais uma vez, a figura mostra a distribuição de tensões σ_{xx} na barra obtida com a GBT.

3.3. Torção e flexão fora do plano da figura



(b) Configurações deformadas obtidas com a GBT e um modelo de elementos finitos de casca (fator de escala = 1). No caso da GBT, apresenta-se a distribuição as tensões σ_{xx} .

Figura 3.17: Resultados do exemplo 5.

3.3.5 Exemplo 6 — secção em I solicitada segundo o eixo forte

Neste exemplo considera-se a secção transversal do exemplo anterior, mas agora orientada de forma a que fique solicitada à flexão em torno do eixo forte e torção, conforme mostra a Figura 3.18. A geometria do problema, os referenciais locais utilizados para definir os modos de deformação e a numeração atribuída a cada parede são também fornecidos na figura.

Os vetores das componentes dos modos de deformação utilizados são dados por (a primeira entrada corresponde ao modo de flexão e a segunda ao modo de torção)

$$\bar{\mathbf{u}}^{P1} = [y \ 0]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P1} = [-1 \ 0]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P1} = \left[\frac{y}{R} \ y\right]^t, \quad (3.92)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P2} = \left[-\frac{h}{2} \ \frac{h}{2}y\right]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P2} = \left[-\frac{h}{2R} \ -\frac{h}{2}\right]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P2} = \left[1 + \frac{y}{R} \ y\right]^t, \quad (3.93)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P3} = \left[\frac{h}{2} \ -\frac{h}{2}y\right]^t, \quad \bar{\mathbf{v}}^{P3} = \left[\frac{h}{2R} \ \frac{h}{2}\right]^t, \quad \bar{\mathbf{w}}^{P3} = \left[1 + \frac{y}{R} \ y\right]^t, \quad (3.94)$$

$$(3.95)$$

e são representados na Figura 3.20a.

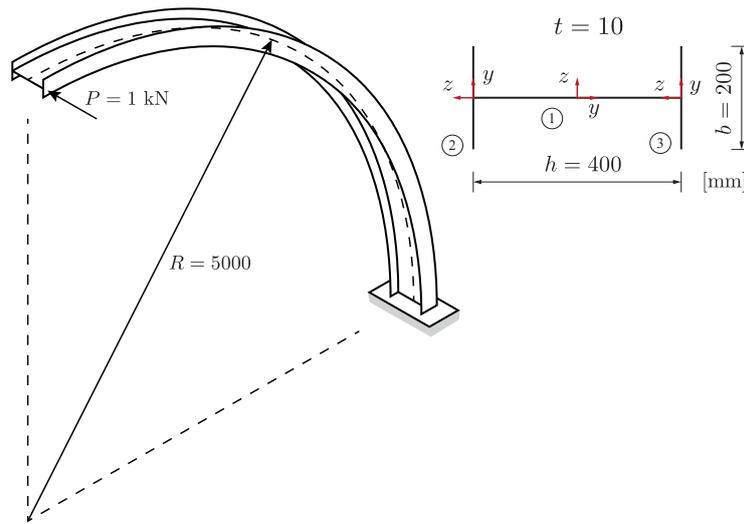


Figura 3.18: Exemplo 6: barra curva com secção em I solicitada à flexão segundo o eixo forte.

À semelhança dos exemplos anteriores, a Figura 3.19 mostra a variação do deslocamento horizontal do ponto de aplicação da força (ponto médio da alma) com o número de elementos finitos (Vlasov, GBT e GBT-MFF), bem como a solução obtida com um modelo refinado de elementos finitos de casca de 4 nós (*ADINA*), que se reproduz na Figura 3.20b. A Tabela 3.6 apresenta os valores do deslocamento para as máximas discretizações adotadas. Neste caso é o elemento de Vlasov e o das faixas finitas que mais se aproximam da solução obtida com modelo de elementos finitos convencionais, mas as diferenças são muito menores do que no exemplo anterior. Mais uma vez se conclui que a formulação simplificada não é adequada para analisar este tipo de problemas. De novo, efetuou-se uma análise incluindo os modos de deformação por corte, concluindo-se que estes não têm influência significativa na solução (a diminuição do erro é de 0,29%). Note-se ainda que o número de elementos finitos necessário para obter a convergência dos resultados é superior ao dos exemplos anteriores relativos à torção e flexão.

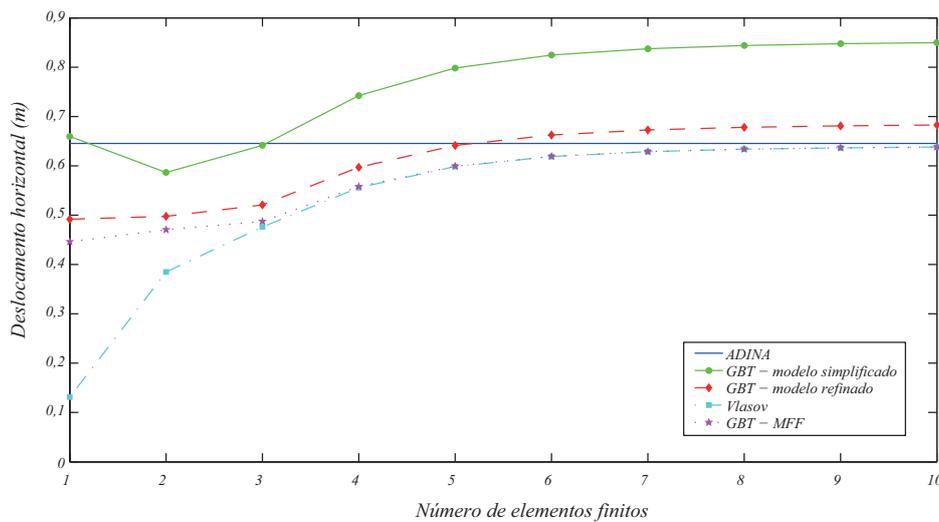


Figura 3.19: Exemplo 6: evolução do deslocamento horizontal com o número de elementos finitos utilizados.

Tabela 3.6: Exemplo 6: deslocamento horizontal.

	<i>ADINA</i>	Vlasov	GBT (simplificado)	GBT (refinado)	GBT (MFF)
Deslocamento (m)	0,645	0,638	0,850	0,683	0,638
Erro relativo		1,09%	-31,78%	-5,89%	1,09%

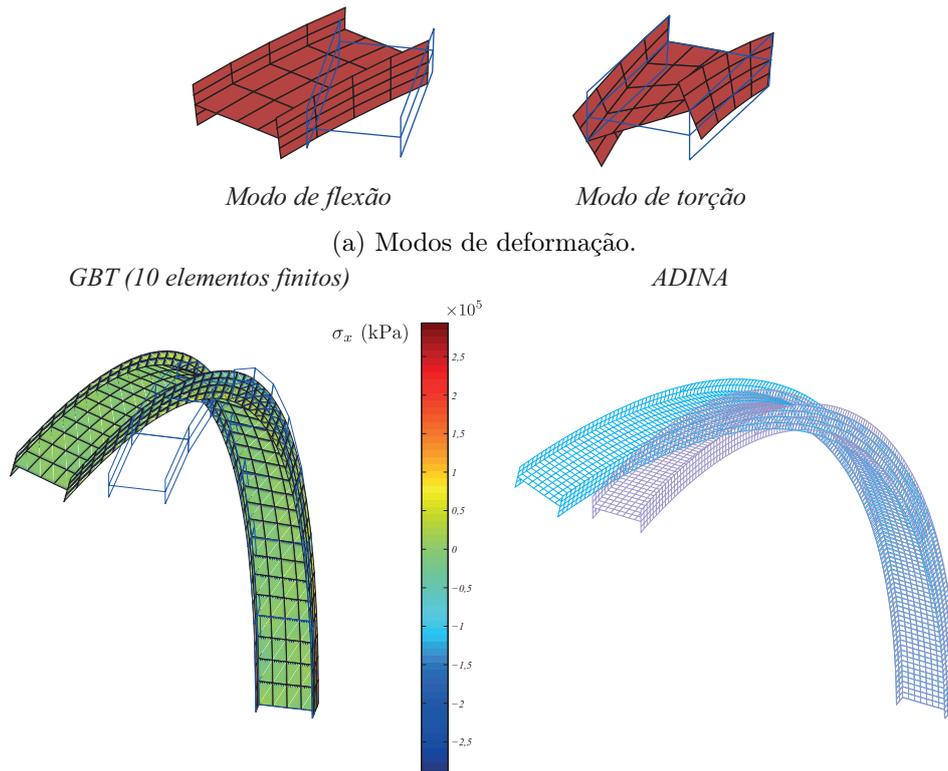


Figura 3.20: Resultados do exemplo 6.

3.4 Distorção

3.4.1 Exemplo 7 — secção com distorção

Este exemplo consiste numa barra curva, com secção poligonal aberta de parede fina (quatro paredes), orientada tal como ilustrado na Figura 3.21. A barra está sujeita à ação de uma carga concentrada, vertical, aplicada na extremidade livre, a qual provoca a flexão da barra (com esforço axial) e a distorção da secção. Na Figura 3.21 apresenta-se ainda a geometria da secção transversal (note-se que o eixo da peça coincide com o centro de gravidade da secção).

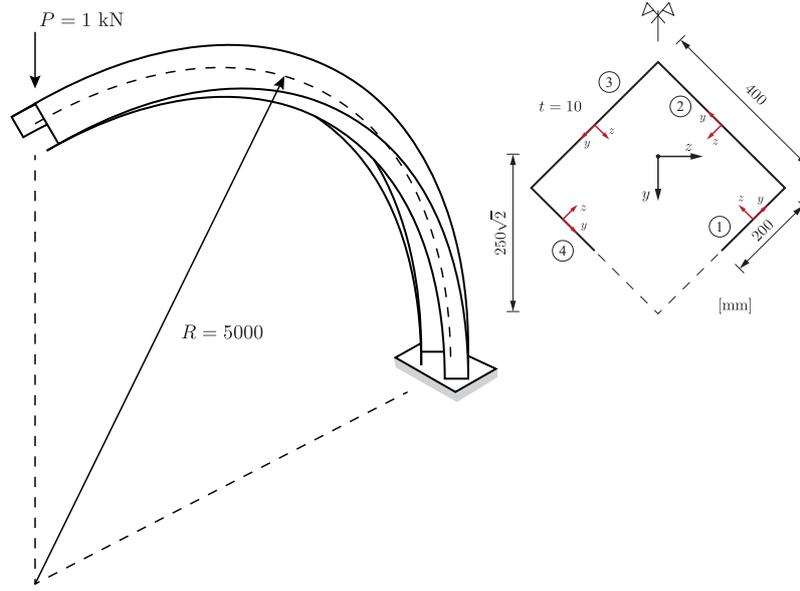


Figura 3.21: Exemplo 7: barra curva com secção poligonal aberta solicitada à flexão.

Inicialmente incluíram-se três modos de deformação na análise (deformação axial, flexão e distorção), cujos vetores das respectivas componentes são dados por

$$\bar{\mathbf{u}}^{P1} = [0, 9717 + 0, 1414y \quad -0, 1414 + 0, 7071y \quad 14, 6713 - 734, 0375y]^t, \quad (3.96)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P2} = [1, 0141 + 0, 1414y \quad 0, 0707 + 0, 7071y \quad -7, 3363 + 256, 9813y]^t, \quad (3.97)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P3} = [1, 0141 - 0, 1414y \quad 0, 0707 - 0, 7071y \quad -7, 3363 - 256, 9813y]^t, \quad (3.98)$$

$$\bar{\mathbf{u}}^{P4} = [0, 9717 - 0, 1414y \quad -0, 1414 - 0, 7071y \quad 14, 6713 + 734, 0375y]^t, \quad (3.99)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{P1} = [0 \quad -0, 7071 \quad 715, 3506]^t, \quad (3.100)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{P2} = [0 \quad -0, 7071 \quad -216, 6530]^t, \quad (3.101)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{P3} = [0 \quad 0, 7071 \quad 216, 6530]^t, \quad (3.102)$$

$$\bar{\mathbf{v}}^{P4} = [0 \quad 0, 7071 \quad -715, 3506]^t, \quad (3.103)$$

$$\bar{\mathbf{w}}^{P1} = [0 \quad -0, 7071 \quad 3663, 7636y - 628, 0294]^t, \quad (3.104)$$

$$\bar{\mathbf{w}}^{P2} = [0 \quad 0, 7071 \quad -7632, 8409y^3 - 4579, 7045y^2 + 2747, 8227y - 43, 6606]^t, \quad (3.105)$$

$$\bar{\mathbf{w}}^{P3} = [0 \quad 0, 7071 \quad 7632, 8409y^3 - 4579, 7045y^2 - 2747, 8227y - 43, 6606]^t, \quad (3.106)$$

$$\bar{\mathbf{w}}^{P4} = [0 \quad -0, 7071 \quad -3663, 7636y - 628, 0294]^t, \quad (3.107)$$

onde a primeira entrada corresponde ao modo de deformação axial, a segunda ao modo de flexão e a terceira ao modo distorcional. De seguida é efetuada uma explicação breve sobre o processo da sua obtenção.

O modo de deformação axial foi calculado de modo a que ao nível do centro de gravidade da secção transversal se verificasse $\bar{u}_k = 1$ e, para todas as paredes, $\bar{v}_k = 0$ (cumprindo a relação (2.75)). Este modo varia linearmente ao longo da altura da secção, sendo crescente no sentido negativo do eixo global y (à semelhança do modo apresentado na Figura 3.2a).

O modo de deformação de flexão no plano da estrutura foi determinado de modo a que ao nível do centro de gravidade da secção se verificasse $\bar{u}_k = 0$ e que o deslocamento vertical de todas as paredes fosse igual a 1, no sentido positivo do eixo global y (de novo, à semelhança da Figura 3.2b).

No cálculo do modo distorcional foram efetuados os seguintes passos:

- 1 As componentes \bar{u}_k de cada parede foram extraídas do modo distorcional calculado pelo programa GBTUL, assumindo que a peça tem eixo reto⁸.
- 2 As componentes \bar{v}_k de cada parede foram calculadas com recurso à relação (2.75).
- 3 No modo distorcional as componentes \bar{w}_k devem assumir uma forma polinomial, no máximo do terceiro grau de acordo com o procedimento proposto por Schardt (1989) (i.e., $\bar{w}_k = C_1 + C_2y + C_3y^2 + C_4y^3$), que consiste em analisar a secção transversal como sendo um pórtico cujas barras têm inércia igual a $I = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)}$ e são axialmente indeformáveis. De seguida, impõem-se assentamentos de apoio (que correspondem aos deslocamentos \bar{v}_k), como indicado na Figura 3.22, o que permite obter as constantes C_1 – C_4 de cada parede e, conseqüentemente, as funções \bar{w}_k .

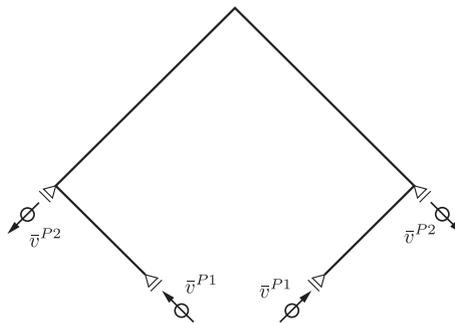


Figura 3.22: Representação da secção transversal como um pórtico sujeito a assentamentos de apoio.

A utilização dos três modos supracitados revelou-se não ser suficiente para obter resultados precisos. Assim, para enriquecer o conjunto de modos utilizados, foram considerados três modos adicionais, que se designaram por “modos locais”. A configuração destes modos é simétrica relativamente ao eixo de simetria da secção transversal (dado que o problema em causa apresenta simetria) e as componentes de deslocamento \bar{u}_k e \bar{v}_k são nulas. O primeiro modo local corresponde a uma rotação unitária do ponto de intersecção das paredes superiores com as paredes inferiores. O segundo modo local apresenta deslocamentos \bar{w}_k apenas nas paredes superiores, mantendo a rotação nula nas suas extremidades. O terceiro modo local

⁸O programa utiliza centra o referencial local de cada parede numa das extremidades, em vez do ponto médio, como é feito neste trabalho. Além disso, utiliza ainda coordenadas normalizadas, i.e., independentemente da dimensão da parede, o eixo alinhado com a largura desta varia sempre entre 0 e 1. Assim, sendo s o eixo utilizado no programa, y o eixo local adotado neste trabalho (ver Figura 3.21) e b a largura da parede, é necessário efetuar a mudança de coordenadas

$$s = \frac{y}{b} + \frac{1}{2}.$$

apresenta deslocamentos \bar{w}_k apenas nas paredes inferiores. O vetor das componentes \bar{w}_k dos modos locais para cada parede é dado por

$$\bar{w}^{P1} = [y - 0, 1 \quad 0 \quad (y - 0, 1)^2]^t, \quad (3.108)$$

$$\bar{w}^{P2} = [(y - 0, 2)^2(y + 0, 2)/0, 16 \quad (y - 0, 2)^2(y + 0, 2)^2 \quad 0]^t, \quad (3.109)$$

$$\bar{w}^{P3} = [-(y + 0, 2)^2(y - 0, 2)/0, 16 \quad (y - 0, 2)^2(y + 0, 2)^2 \quad 0]^t, \quad (3.110)$$

$$\bar{w}^{P4} = [-y - 0, 1 \quad 0 \quad (y + 0, 1)^2]^t. \quad (3.111)$$

Na Figura 3.23 mostra-se a configuração de cada um dos modos de deformação (o modo axial foi representado considerando a função de amplitude $\phi'_1 = x$ e utilizou-se $\phi_2 = \phi_3 = x$ para representar os modos de flexão e distorcional).

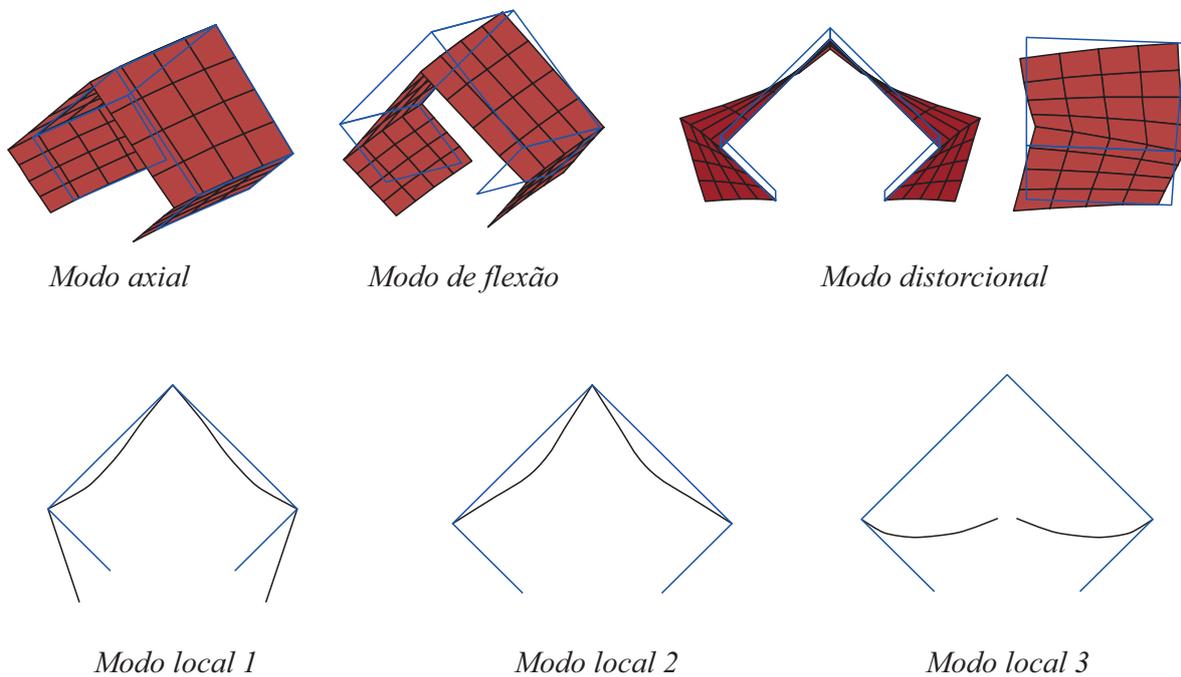


Figura 3.23: Modos de deformação.

Nos exemplos anteriores, as funções \bar{w}_k apresentavam expressões polinomiais do primeiro grau, no máximo. Assim, as paredes da secção transversal sofriam apenas movimentos de corpo rígido (translação e rotação). Como o modo distorcional e os modos locais envolvem funções polinomiais de grau superior ao primeiro, ocorre flexão transversal das paredes, pelo que foi necessário considerar a subdivisão dos termos de membrana e de flexão, aplicando-se um operador constitutivo distinto em cada um dos casos (recordar Secção 2.5 e a expressão (2.149)). Aumentou-se ainda o número de pontos de integração segundo y (concluiu-se que a utilização de 3 pontos é suficiente para obter resultados precisos).

Na Tabela 3.7 apresentam-se os valores do deslocamento vertical do ponto de aplicação da força obtidos com a GBT (modelos simplificado, refinado e baseado no MFF) e com um modelo refinado de elementos finitos de casca de 4 nós (*ADINA*). Foram utilizados 20 elementos de igual comprimento no caso da GBT. Apresentam-se também os erros relativos para a solução de elementos finitos convencionais. É possível observar que os modelos da GBT fornecem resultados virtualmente idênticos, com uma diferença bastante baixa relativamente

ao resultado do modelo de elementos finitos de casca. Efetuou-se ainda uma análise tendo em conta o modo de deformação por corte correspondente ao modo distorcional, que permitiu concluir que este não tem influência nos resultados. Concluiu-se ainda que o aumento do número de elementos finitos também não fornece uma diminuição significativa do erro.

Tabela 3.7: Exemplo 7: deslocamento vertical.

	<i>ADINA</i>	GBT (simplificado)	GBT (refinado)	GBT (MFF)
Deslocamento (m)	0,004705	0,004529	0,004532	0,004532
Erro relativo		3,74%	3,68%	3,68%

De modo a verificar a influência de cada modo, efetuaram-se análises adicionando progressivamente os vários modos e comparando o deslocamento obtido⁹. Na Tabela 3.8 apresentam-se os valores do deslocamento vertical do ponto de aplicação da força e os erros relativos para a solução de elementos finitos convencionais de casca. O deslocamento obtido para o caso em que se consideram apenas os modos axial e de flexão coincide com o obtido pela fórmula da teoria de Winkler-Bach (que se encontra deduzida no Anexo A.2). É possível observar também que o modo distorcional não é suficiente para reproduzir o comportamento da barra, sendo necessário utilizar os modos locais, que reduzem o erro em cerca de 20%. Este facto representa uma diferença considerável em relação ao caso reto, onde a ação de cargas concentradas aplicadas nos vértices da secção é muito bem reproduzida pela GBT sem modos locais (ver, por exemplo, Schardt, 1989). Assim, seria importante investigar se é possível redefinir os modos distorcionais de maneira a dispensar a necessidade de incluir modos locais – esta tarefa é um dos desenvolvimentos futuros propostos.

Tabela 3.8: Exemplo 7: contribuição dos modos de deformação.

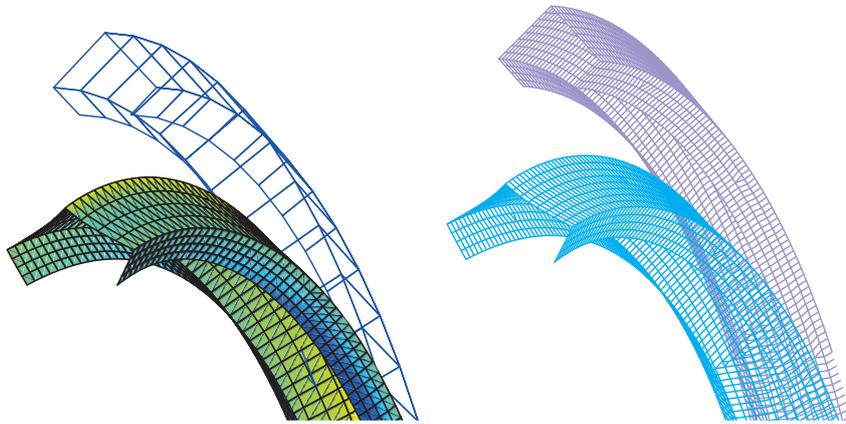
Modos	Deslocamento (m)	Erro relativo
Axial + Flexão	0,002593	44,89%
Axial + Flexão + Distorcional	0,003512	25,36%
Axial + Flexão + Distorcional + Local 1	0,004201	10,71%
Todos os modos	0,004532	3,68%

A Figura 3.24a mostra uma vista aproximada em perspetiva da configuração deformada da barra obtida com o modelo refinado da GBT e o modelo de elementos finitos de casca, permitindo observar a distorção da secção transversal. A Figura 3.24b mostra os respetivos alçados, sendo mais uma vez possível verificar uma excelente concordância entre os dois modelos.

⁹Em certos casos é possível efetuar análises utilizando um modo de cada vez e posteriormente somar os resultados obtidos. Neste caso tal não é possível devido ao acoplamento existente entre os modos.

GBT (20 elementos finitos)

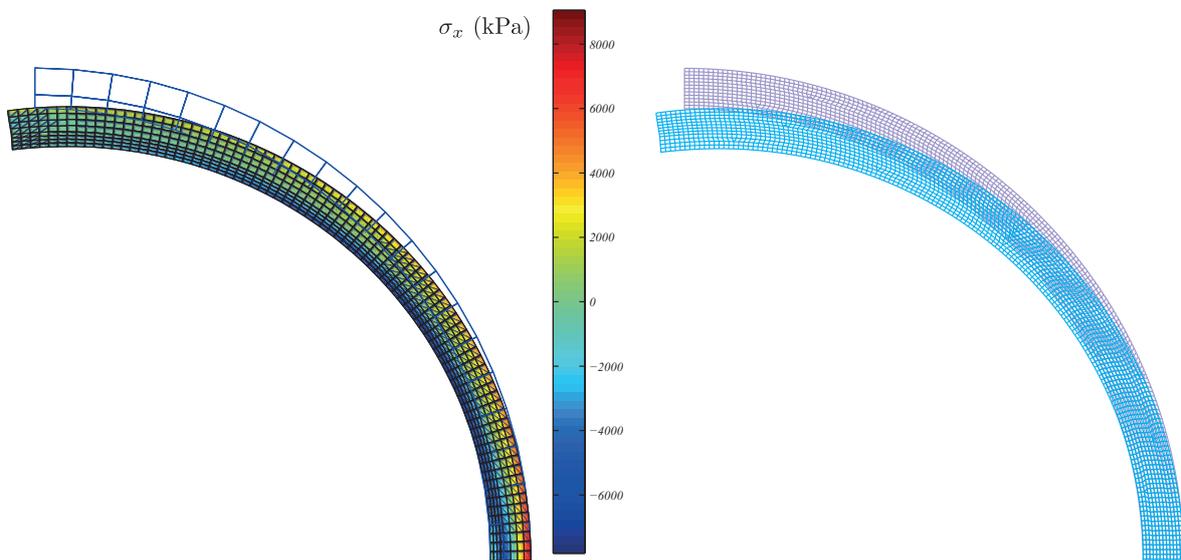
ADINA



(a) Vista aproximada da configuração deformada obtida com a GBT e um modelo de elementos finitos de casca (fator de escala = 200).

GBT (20 elementos finitos)

ADINA



(b) Configurações deformadas obtidas com a GBT e um modelo de elementos finitos de casca (fator de escala = 100). No caso da GBT, apresentam-se as distribuições das tensões σ_{xx} .

Figura 3.24: Resultados do exemplo 7.

Capítulo 4

Conclusões e desenvolvimentos futuros

4.1 Conclusões

Neste trabalho desenvolveu-se, implementou-se e validou-se uma formulação original da GBT para analisar o comportamento linear de barras de eixo curvo, com secção transversal de parede fina, deformável. A formulação foi inicialmente desenvolvida para permitir a consideração de curvatura arbitrária (nomeadamente variável ao longo do eixo da barra), mas optou-se por explorar completamente e implementar apenas o caso correspondente a curvatura de flexão constante.

O trabalho desenvolvido permite extrair as seguintes conclusões:

- (i) A formulação desenvolvida coincide com a teoria clássica de Winkler-Bach para o caso plano.
- (ii) Quando comparada com a formulação das faixas finitas para curvatura de flexão constante, a formulação refinada da GBT desenvolvida apenas difere num dos termos de uma das componentes de deformação (a distorção de flexão). No entanto, é importante salientar que a GBT apresenta, em relação ao MFF, a vantagem de incluir as hipóteses de Vlasov e inextensibilidade transversal das paredes, o que conduz a uma economia em termos do número de graus de liberdade sem perda de precisão da solução.
- (iii) Para o caso de barras curvas com secção retangular de parede fina, sujeitas à flexão para fora do plano e torção, a formulação refinada da GBT conduz a equações diferenciais de equilíbrio semelhantes às da Teoria de Vlasov.
- (iv) Os exemplos numéricos apresentados ilustram as potencialidades do elemento finito proposto.
- (v) Os modos de deformação da GBT para vigas retas *não podem* ser diretamente aplicados a vigas curvas, dado que as relações cinemáticas são mais complexas.

4.2 Desenvolvimentos futuros

O trabalho realizado constitui uma nova abordagem à análise do comportamento de peças curvas com secção deformável e, conseqüentemente, abre talvez mais portas do que aquelas que encerrou. Assim, apontam-se os seguintes desenvolvimentos para um trabalho futuro:

Capítulo 4. Conclusões e desenvolvimentos futuros

- (i) Em primeiro lugar, em relação ao caso da torção, deve procurar-se explicar, de uma forma totalmente satisfatória, a razão das diferenças que se verificam entre os resultados obtidos com a formulação da GBT e os modelos de elementos finitos de casca. Julga-se que tal passará por incluir mais modos de deformação nas análises, de modo a poder identificar os fenómenos intervenientes.
- (ii) A determinação dos modos de deformação para barras curvas deve ser completamente explorada e sistematizada. Tal como foi referido no final da Secção 3.4.1, deve ser investigado se é possível redefinir os modos distorcionais de maneira a os tornar mais “precisos”.
- (iii) O caso da curvatura de torção constante deve também ser prosseguido, dado que as equações foram já parcialmente obtidas no presente trabalho.
- (iv) Um objetivo mais ambicioso consiste em desenvolver um elemento finito capaz de incorporar curvatura variável ao longo do seu eixo.
- (v) A introdução de efeitos não-lineares (tanto geométricos como físicos) constitui também uma natural extensão da formulação desenvolvida.

Bibliografia

- Armero, F. e Valverde, J., 2012. Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff rods. I: The linear plane case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213–216:427–457.
- Bathe, K. J., 2014. *ADINA system* (versão 9, 900 nós), ADINA R & D Inc.
- Bonet, J. e Wood, R. D., 1997. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, Reino Unido.
- Boresi, A. P. e Schmidt, R. J., 2003. *Advanced Mechanics of Materials*. John Willey & Sons, Inc., Nova Jérсия, Estados Unidos da América.
- Cheung, M. S. e Cheung, Y. K., 1971. Analysis of curved box girder bridges by finite strip method. *IABSE Publications*, 31:1–19.
- Cheung, M. S., Li, W. e Chidiac, S. E., 1996. *Finite Strip Analysis of Bridges*. E & FN Spon, Londres, Reino Unido.
- Davies, J. M. e Leach, P., 1994. First-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31:187–220.
- Davies, J. M., Leach, P. e Heinz, D., 1994. Second-order generalised beam theory. *Journal of Constructional Steel Research*, 31:221–241.
- El-Amin, F. M. e Kasem, M. A., 1978. Higher-order horizontally-curved beam finite element including warping for steel bridges. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:159–167.
- Fu, C. C. e Hsu, Y. T., 1995. The development of an improved curvilinear thin-walled Vlasov element. *Computers and Structures*, 54(1):147–159.
- Gonçalves, R., 2014. *Apresentações PowerPoint da Unidade Curricular de Lajes e Cascas*. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2011. Generalised beam theory-based finite elements for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, 49:1237–1245.
- Gonçalves, R. e Camotim, D., 2012. Geometrically non-linear generalised beam theory for elastoplastic thin-walled metal members. *Thin-Walled Structures*, 51:121–129.
- Gonçalves, R., Ritto-Corrêa, M. e Camotim D., 2010. A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of generalized beam theory. *Computational Mechanics*, Volume 46, Issue 5, pp.759-781.
- Henriques, D., 2014. *Um elemento finito fisicamente não-linear para vigas mistas aço-betão*, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Bibliografia

- The Mathworks Inc., 2013. *MATLAB R2013b* (versão 8.2), Massachusetts, Estados Unidos da América.
- Murray, N. W., 1986. *Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures*. Clarendon Press, Oxford, Reino Unido.
- Schardt, R., 1989. *Verallgemeinerte technische biegetheorie* (Teoria Generalizada de Vigas). Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.
- Vlasov, V., 1958. *Tonkostenyte sterjni*. Fizmatgiz, Moscovo, Rússia, 2^a edição. Tradução francesa: *Pièces Longues en Voiles Minces*, Eyrolles, Paris, França, 1962.

Anexo A

Cálculos auxiliares

A.1 Cálculo de integrais

Defina-se I_R como

$$I_R = \int_{\Omega} \frac{y^2}{1 - y/R} d\Omega. \quad (\text{A.1})$$

Note-se que, se $R \rightarrow \infty$, então $y/R \rightarrow 0$, e $I_R \rightarrow I_x$. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{y}{1 - y/R} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{yR}{R - y} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{yR}{R - y} - y d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{y^2}{R - y} d\Omega \\ &= \frac{1}{R} \int_{\Omega} \frac{y^2}{1 - y/R} d\Omega \\ &= \frac{I_R}{R}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{1 - y/R} d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1 - y/R + y/R}{1 - y/R} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} 1 + \frac{y/R}{1 - y/R} d\Omega \\ &= \Omega + \frac{I_R}{R^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.2 Deslocamento vertical da Teoria de Winkler-Bach

Considere-se a consola da Figura 3.1, sujeita a uma carga vertical P , aplicada na sua extremidade livre. Esta carga provoca esforços apenas no plano da figura. Utilizando as equações de equilíbrio num elemento infinitesimal curvo, ilustrado na Figura A.1, tem-se

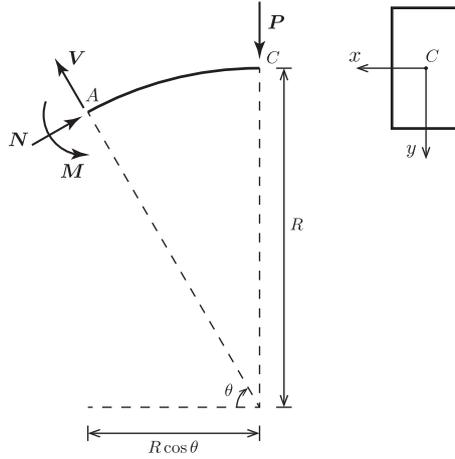


Figura A.1: Elemento curvo.

$$\sum M_A : M - PR \cos \theta = 0 \Rightarrow M = PR \cos \theta, \quad (\text{A.4})$$

$$\sum F_H : -V \cos \theta + N \sin \theta = 0 \Rightarrow V = N \tan \theta, \quad (\text{A.5})$$

$$\sum F_V : V \sin \theta + N \cos \theta - P = 0 \Rightarrow N = P \cos \theta. \quad (\text{A.6})$$

Para a secção retangular indicada na Figura A.1, de Boresi e Schmidt (2003), a energia interna de deformação, desprezando o efeito do esforço transversal, é dada por

$$\mathcal{U} = \int \frac{N^2 R}{2E\Omega} d\theta + \int \frac{\Omega_m M^2}{2E\Omega (R\Omega_m - \Omega)} d\theta - \int \frac{MN}{E\Omega} d\theta, \quad (\text{A.7})$$

com

$$\begin{aligned} R\Omega_m &= R \int_{\Omega} \frac{d\Omega}{R+y} \\ &= \int_{\Omega} \frac{R}{R+y} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{1+y/R} d\Omega \\ &= \Omega + \frac{I_R}{R^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.8) e as expressões dos esforços em (A.7), tendo em conta que θ varia de 0 a $\pi/2$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{\pi P^2 R}{8E\Omega} + \frac{\pi \Omega_m P^2 R^2}{8E\Omega (R\Omega_m - \Omega)} - \frac{\pi P^2 R}{4E\Omega} \\ &= \frac{\pi P^2 R}{8E\Omega} \left(1 + \frac{R\Omega_m}{R\Omega_m - \Omega} - 2 \right) \\ &= \frac{\pi P^2 R^3}{8EI_R}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pelo Teorema de Castigliano, o deslocamento vertical da extremidade da consola é dado por

$$\delta = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial P} = \frac{\pi PR^3}{4EI_R}. \quad (\text{A.10})$$

Anexo B

Elemento finito de Vlasov

B.1 Formulação do elemento finito

Considere-se a expressão da energia de deformação elástica apresentada na Secção 3.3.1

$$\mathcal{U} = \frac{EI}{2} \int_L \left(w'' - \frac{\theta}{R} \right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_L \left(\frac{w'}{R} + \theta' \right)^2 dx + \frac{EI_w}{2} \int_L \left(\frac{w''}{R} + \theta'' \right)^2 dx. \quad (\text{B.1})$$

A variação desta energia fornece

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= EI \int_L \left(w'' - \frac{\theta}{R} \right) \left(\delta w'' - \frac{\delta\theta}{R} \right) dx \\ &\quad + GJ \int_L \left(\frac{w'}{R} + \theta' \right) \left(\frac{\delta w'}{R} + \delta\theta' \right) dx \\ &\quad + EI_w \int_L \left(\frac{w''}{R} + \theta'' \right) \left(\frac{\delta w''}{R} + \delta\theta'' \right) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Assim, sem forças distribuídas e considerando uma única força concentrada aplicada Q , a forma variacional do equilíbrio (neste caso obtida a partir do Princípio da Estacionaridade da Energia Potencial) é dada por

$$\delta\mathcal{U} - Q\delta u = 0, \quad (\text{B.3})$$

onde u é o deslocamento conjugado da força Q . Utilizando funções de interpolação de Hermite (recordar Secção 1.4.3), o campo de deslocamentos, cujas componentes correspondem a w e θ , pode ser escrito como

$$w = H_1 d_w(x=0) + H_2 d_{w,x}(x=0) + H_3 d_w(x=l) + H_4 d_{w,x}(x=l) \quad (\text{B.4})$$

$$\theta = H_1 d_\theta(x=0) + H_2 d_{\theta,x}(x=0) + H_3 d_\theta(x=l) + H_4 d_{\theta,x}(x=l), \quad (\text{B.5})$$

onde d_w e d_θ correspondem às incógnitas do problema. O campo de deslocamentos pode ainda ser escrito na forma matricial

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{d} \quad (\text{B.6})$$

com

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & H_2 & 0 & 0 & H_3 & H_4 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{d} = [d_w(0) \quad d_{w,x}(0) \quad d_\theta(0) \quad d_{\theta,x}(0) \quad d_w(l) \quad d_{w,x}(l) \quad d_\theta(l) \quad d_{\theta,x}(l)]^t. \quad (\text{B.8})$$

Escrevendo a expressão (B.2) na forma matricial, obtém-se

$$\delta\mathcal{U} = \int_L \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta\theta \\ \delta w' \\ \delta\theta' \\ \delta w'' \\ \delta\theta'' \end{bmatrix}^t \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} w \\ \theta \\ w' \\ \theta' \\ w'' \\ \theta'' \end{bmatrix} dx, \quad (\text{B.9})$$

com

$$\mathbf{K}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI/R^2 & 0 & 0 & -EI/R & 0 \\ 0 & 0 & GJ/R^2 & GJ/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & GJ/R & GJ & 0 & 0 \\ 0 & -EI/R & 0 & 0 & EI + EI_w/R^2 & EI_w/R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EI_w/R & EI_w \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Substituindo a expressão (B.6) nas expressões anteriores, pode-se escrever a variação da energia de deformação elástica em função do vetor \mathbf{d}

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} &= \int_L \begin{bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\mathbf{U}' \\ \delta\mathbf{U}'' \end{bmatrix}^t \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{U}' \\ \mathbf{U}'' \end{bmatrix} dx \\ &= \int_L \begin{bmatrix} \Psi(x)\delta\mathbf{d} \\ \Psi'(x)\delta\mathbf{d} \\ \Psi''(x)\delta\mathbf{d} \end{bmatrix}^t \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \Psi(x)\mathbf{d} \\ \Psi'(x)\mathbf{d} \\ \Psi''(x)\mathbf{d} \end{bmatrix} dx \\ &= \delta\mathbf{d}^t \int_L \begin{bmatrix} \Psi(x) \\ \Psi'(x) \\ \Psi''(x) \end{bmatrix}^t \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \Psi(x) \\ \Psi'(x) \\ \Psi''(x) \end{bmatrix} dx \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

onde é possível identificar a matriz de rigidez do problema como

$$\mathbf{K} = \int_L \begin{bmatrix} \Psi(x) \\ \Psi'(x) \\ \Psi''(x) \end{bmatrix}^t \mathbf{K}^* \begin{bmatrix} \Psi(x) \\ \Psi'(x) \\ \Psi''(x) \end{bmatrix} dx. \quad (\text{B.12})$$

O resultado da integração da expressão anterior apresenta-se na Secção B.2.

No problema em questão, o vetor das forças externas é nulo, à exceção da entrada correspondente a $w(x = \pi R/2)$, cujo valor é unitário ($x = \pi R/2$ corresponde à extremidade livre da peça). Finalmente, as condições de fronteira cinemáticas devem garantir o encastramento em $x = 0$, portantoo

$$w(0) = w'(0) = \theta(0) = \theta'(0) = 0. \quad (\text{B.13})$$

B.2 Integração da matriz de rigidez

A integração da expressão (B.12) fornece a matriz

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_A & K_B & K_C & K_D & -K_A & K_B & -K_C & K_D \\ & K_E & K_F & K_G & -K_B & K_H & -K_D & K_I \\ & & K_J & K_K & -K_C & K_D & K_L & K_M \\ & & & K_N & -K_D & K_I & -K_M & K_O \\ & & & & K_A & -K_B & K_C & -K_D \\ & & & & & K_E & -K_F & K_G \\ & & & & & & K_J & -K_K \\ \text{sim.} & & & & & & & K_N \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

cujas componentes K_A-K_O são dadas por

$$K_A = \frac{6}{5} \frac{10EIR^2 + GJl^2 + 10EI_w}{l^3R^2}, \quad (\text{B.15})$$

$$K_B = \frac{1}{10} \frac{60EIR^2 + GJl^2 + 60EI_w}{l^2R^2}, \quad (\text{B.16})$$

$$K_C = \frac{6}{5} \frac{EI l^2 + GJl^2 + 10EI_w}{l^3R}, \quad (\text{B.17})$$

$$K_D = \frac{1}{10} \frac{EI l^2 + GJl^2 + 60EI_w}{l^2R}, \quad (\text{B.18})$$

$$K_E = \frac{2}{15} \frac{30EIR^2 + GJl^2 + 30EI_w}{lR^2}, \quad (\text{B.19})$$

$$K_F = \frac{1}{10} \frac{11EI l^2 + GJl^2 + 60EI_w}{l^2R}, \quad (\text{B.20})$$

$$K_G = \frac{2}{15} \frac{EI l^2 + GJl^2 + 30EI_w}{lR}, \quad (\text{B.21})$$

$$K_H = \frac{1}{30} \frac{60EIR^2 - GJl^2 + 60EI_w}{lR^2}, \quad (\text{B.22})$$

$$K_I = -\frac{1}{30} \frac{EI l^2 + GJl^2 - 60EI_w}{lR}, \quad (\text{B.23})$$

$$K_J = \frac{1}{35} \frac{13EI l^2 + 42GJR^2l^2 + 420EI_wR^2}{l^3R^2}, \quad (\text{B.24})$$

$$K_K = \frac{1}{210} \frac{11EI l^4 + 21GJR^2l^2 + 1260EI_wR^2}{l^2R^2}, \quad (\text{B.25})$$

$$K_L = \frac{3}{70} \frac{3EI l^4 - 28GJR^2l^2 - 280EI_wR^2}{l^3R^2}, \quad (\text{B.26})$$

$$K_M = -\frac{1}{420} \frac{13EI l^4 - 42GJR^2l^2 - 2520EI_wR^2}{l^2R^2}, \quad (\text{B.27})$$

$$K_N = \frac{1}{105} \frac{EI l^4 + 14GJR^2l^2 + 420EI_wR^2}{lR^2}, \quad (\text{B.28})$$

$$K_O = -\frac{1}{420} \frac{3EI l^4 + 14GJR^2l^2 - 840EI_wR^2}{lR^2}. \quad (\text{B.29})$$

Anexo C

Rotinas

As rotinas apresentadas correspondem ao exemplo 7.

C.1 Rotina *principal*

```
clear all;
clc;

%Pontos de integracao; 1a linha: posicoes normalizadas (xi);
2a linha: pesos de Gauss (wi)
Gauss{1} = [0 ; 2];
Gauss{2} = [-.5773502692 .5773502692 ; 1 1];
Gauss{3} = [-.7745966692 0 .7745966692 ; .5555555556 .8888888889 .5555555556];
Gauss{4} = [-.8611363116 -.3399810436 .3399810436 .8611363116 ; .3478548451
    .6521451549 .6521451549 .3478548451];
Gauss{5} = [-0.9061798459 -0.5384693101 0 0.5384693101 0.9061798459;
0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889 0.4786286705 0.2369268851];
Gauss{6} = [-0.932469514203152 -0.661209386466265 -0.238619186083197
    0.238619186083197 0.661209386466265 0.932469514203152;
0.171324492379170 0.360761573048139 0.467913934572691 0.467913934572691
    0.360761573048139 0.171324492379170];
Gauss{7} = [-0.9491079123 -0.7415311856 -0.4058451514 0 0.4058451514 0.7415311856
    0.9491079123;
0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837 0.3818300505 0.2797053915
    0.1294849662];
Gauss{8} = [-0.960289856 -0.796666477 -0.52553241 -0.183434643 0.183434643
    0.52553241 0.796666477 0.960289857;
0.101228536 0.222381034 0.313706646 0.362683783 0.362683783 0.313706646
    0.222381034 0.101228536];
Gauss{9} = [-0.96816024 -0.836031107 -0.613371433 -0.324253423 0 0.324253423
    0.613371433 0.836031107 0.96816024;
0.081274388 0.180648161 0.260610696 0.312347077 0.330239355 0.312347077
    0.260610696 0.180648161 0.081274388];
Gauss{10} = [-0.9739065285171717200779640 -0.8650633666889845107320967
    -0.6794095682990244062343274 -0.4333953941292471907992659
    -0.1488743389816312108848260 0.1488743389816312108848260
    0.4333953941292471907992659 0.6794095682990244062343274
    0.8650633666889845107320967 0.9739065285171717200779640;
```

Anexo C.Rotinas

```
0.0666713443086881375935688 0.1494513491505805931457763 0.2190863625159820439955349
0.2692667193099963550912269 0.2955242247147528701738930
0.2955242247147528701738930 0.2692667193099963550912269
0.2190863625159820439955349 0.1494513491505805931457763
0.0666713443086881375935688];
```

```
%Problema
```

```
ne = 10; %numero de elementos finitos
np = 4; %numero de paredes da seccao
raio = 5; %raio de curvatura
K3 = 1/raio;
beta = pi/2;
l = beta*raio/ne; %comprimento de cada elemento finito
K = [0; 0; K3]; %curvaturas no referencial global
```

```
%Numero de pontos de integracao de Gauss segundo x, y e z
```

```
NgaussX = 3;
NgaussY = 2;
NgaussZ = 2;
```

```
%Propriedades do material
```

```
El = zeros(np,1);
nu = zeros(np,1);
G = zeros(np,1);
Cm = cell(1,np);
Cf = cell(1,np);

El(:,1) = 210e6;
nu(:,1) = 0.3;
for i = 1 : np
    G(i) = (1/2)*El(i)/(1+nu(i));
    Cm{i} = [El(i) 0 0; 0 0 0; 0 0 G(i)];
    Cf{i} = El(i)/(1-nu(i)^2)*[1 nu(i) 0 ; nu(i) 1 0; 0 0 (1-nu(i))/2];
end
```

```
%Rotacao do referencial de cada parede
```

```
alfa = [135*pi/180; 225*pi/180; 315*pi/180; 45*pi/180];
R = zeros(3,3,np);
Kloc = zeros(3,1,np); %curvaturas de cada parede no referencial local
for a = 1 : np
    R(:,:,a) = [1 0 0; 0 cos(alfa(a)) -sin(alfa(a)); 0 sin(alfa(a)) cos(alfa(a))];
    Kloc(:,:,a) = transpose(R(:,:,a))*K;
end
```

```
%Geometria da seccao, relativamente a linha media
```

```
b = zeros(np,1);
esp = zeros(np,1);
bM = 0.400; %altura da alma
bm = 0.200; %largura dos banzos (iguais)
t = 0.004; %espessura das paredes (neste caso, todas iguais)
b(1) = bm;
b(2) = bM;
b(3) = bM;
b(4) = bm;
```

```

esp(:,1) = t;

%Vetores que referenciam o ponto Ai de cada parede
yCG = 0.25*sqrt(2);
LA = zeros(3,np);
LA(:,1) = [0;yCG-0.15*sqrt(2);0.15*sqrt(2)];
LA(:,2) = [0; -(0.4*sqrt(2)-yCG-0.1*sqrt(2)); 0.1*sqrt(2)];
LA(:,3) = [0; -(0.4*sqrt(2)-yCG-0.1*sqrt(2)); -0.1*sqrt(2)];
LA(:,4) = [0;yCG-0.15*sqrt(2);-0.15*sqrt(2)];

%Variavel GamaA
%como a curvatura e constante, esta variavel nao varia de elemento para elemento (t
= 1, em vez de um ciclo for)
GamaA = zeros(np,1);
t = 1;
xel = 0;
teta = ((t-1)*l+xel)/raio;
Lambda = [cos(teta) -sin(teta) 0; sin(teta) cos(teta) 0; 0 0 1];
dr = [cos(teta); sin(teta);0];
for p = 1 : np
    GamaA(p) = dot(transpose(Lambda*R(:, :, p))*dr, [1;0;0])-1+dot(cross(Kloc(:, :, p),
    transpose(R(:, :, p))*LA(:, p)), [1;0;0]);
end

%Modos de Deformacao
syms y;
J0 = cell(np,1);
for p = 1 : np
    J0{p} = 1 + GamaA(p) - Kloc(3, :, p)*y;
end

Nwarping = 1; %modos de warping
%axial, flexao, distorcao, local 3, local 2, local 1
u{1} = [1-0.1414213562/raio+0.7071067812*y/raio; -0.1414213562+0.7071067812*y;
14.67125-734.0375*y; 0; 0; 0];
u{2} = [1+0.0707106781/raio+0.7071067812*y/raio; 0.07071067812+0.7071067812*y;
-7.33625+256.98125*y; 0; 0; 0];
u{3} = [1+0.0707106781/raio-0.7071067812*y/raio; 0.07071067812-0.7071067812*y;
-7.33625-256.98125*y; 0; 0; 0];
u{4} = [1-0.1414213562/raio-0.7071067812*y/raio; -0.1414213562-0.7071067812*y;
14.67125+734.0375*y; 0; 0; 0];

v{1} = [0; -0.7071067812; 715.35061231689; 0; 0; 0];
v{2} = [0; -0.7071067812; -261.65301611495; 0; 0; 0];
v{3} = [0; 0.7071067812; 261.65301611495; 0; 0; 0];
v{4} = [0; 0.7071067812; -715.35061231689; 0; 0; 0];

w{1} = [0; -0.7071067812; 3663.763607*y-628.0293768; (y-0.1)^2; 0; (y-0.1)*1000];
w{2} = [0; 0.7071067812; -7632.840851*y^3-4579.704508*y^2+2747.822705*y-43.66061780;
0; (y-0.2)^2*(y+0.2)^2; (y-0.2)^2*(y+0.2)/0.16*1000];
w{3} = [0; 0.7071067812; 7632.840851*y^3-4579.704508*y^2-2747.822705*y-43.66061780;
0; (y-0.2)^2*(y+0.2)^2; -(y+0.2)^2*(y-0.2)/0.16*1000];
w{4} = [0; -0.7071067812; -3663.763607*y-628.0293768; (y+0.1)^2; 0; (-y-0.1)*1000];

```

Anexo C.Rotinas

```
N = size(u{1},1); %numero de modos de deformacao
NGLe = Nwarping*3 + (N-Nwarping)*4; %numero de graus de liberdade do elemento

%Restricoes dos GDL
apoios = zeros(1,NGLe);
apoios(1,1:5) = 1;

%Calculos auxiliares
[psi,Qm,Qb,Mpsi,Qu,mPsi,apSI,APsi] = auxiliares(u,v,w,N,Nwarping,np,l,Gauss,b,
    NgaussX,NgaussY,Kloc,J0);

%Analise

position = ne*2*N + 1; %elemento da extremidade
position = position + Nwarping; %vai buscar o 1o GDL a seguir aos modos de warping

%Forca concentrada
F = zeros(2*N*ne + 2*N - Nwarping,1); %vetor das cargas exteriores globais
F(position) = 1; %associado a flexao
F(position+1) = -sqrt(2)*v{2}(3); %associado a distorcao
%aplicar condicoes de apoio
Ff=F;
for i = 2*N - Nwarping:-1:1
    if apoios(1,2*N + i) == 1
        F(i+(2*N*ne+2*N-Nwarping)-(2*N-Nwarping))=[];
    end
end

for i = 2*N - Nwarping:-1:1
    if apoios(1,i) == 1
        F(i) = [];
    end
end

Kt = CalcularKt(N,Nwarping,ne,np,Qm,Qb,Mpsi,NgaussX,NgaussY,NgaussZ,Gauss,l,b,esp,Cm,
    Cf,apoios,K3,GamaA,Kloc);

d = Kt\F;

aux = zeros(2*N*ne+2*N-Nwarping,1);
count = 1;
for ii = 1:2*N-Nwarping
    if apoios(1,ii) == 0
        aux(ii,1) = d(count,1);
        count = count + 1;
    end
end

aux(2*N-Nwarping+1:2*N*ne,1)=d(count:count+(2*N*ne+2*N-Nwarping)-2*(2*N-Nwarping)
-1,1);
for i = 1:2*N-Nwarping
    if apoios(1,2*N+i)==0
        aux((2*N*ne+2*N-Nwarping)-(2*N-Nwarping)+i,1)=d(count+(2*N*ne+2*N-Nwarping)
-2*(2*N-Nwarping),1);
    end
end
```

```

        count = count + 1;
    end
end

```

```

d = aux;
D = Ff'*d;
disp(D);

```

C.2 Rotina *auxiliares*

```

function [psi,Qm,Qb,Mpsi,Qu,mPsi,apSI,APsi] = auxiliares(u,v,w,N,Nwarping,np,l,Gauss
    ,b,NgaussX,NgaussY,K3,Kloc,GamaA,J0)

```

```

%funcoes de interpolacao

```

```

syms x;
F1 = x-x^2/(2*1);
F2 = x^2/(2*1);
F3 = (-2*x^2*(2*x-3*1))/(3*1^2);
H1 = 2*(x/1)^3-3*(x/1)^2+1;
H2 = 1*((x/1)^3-2*(x/1)^2+x/1);
H3 = -2*(x/1)^3+3*(x/1)^2;
H4 = 1*((x/1)^3-(x/1)^2);

```

```

psiFH0 = sym(zeros(Nwarping, N-Nwarping));
psiHF0 = transpose(psiFH0);
psiF1 = sym(zeros(Nwarping));
psiF2 = sym(zeros(Nwarping));
psiF3 = sym(zeros(Nwarping));
psiH1 = sym(zeros(N-Nwarping));
psiH2 = sym(zeros(N-Nwarping));
psiH3 = sym(zeros(N-Nwarping));
psiH4 = sym(zeros(N-Nwarping));

```

```

for i = 1 : Nwarping
    psiF1(i,i) = F1;
    psiF2(i,i) = F2;
    psiF3(i,i) = F3;
end

```

```

for i = 1 : N-Nwarping
    psiH1(i,i) = H1;
    psiH2(i,i) = H2;
    psiH3(i,i) = H3;
    psiH4(i,i) = H4;
end

```

```

psi = [psiF1,psiFH0,psiFH0,psiF3,psiF2,psiFH0,psiFH0;
    psiHF0,psiH1,psiH2,psiHF0,psiHF0,psiH3,psiH4];

```

```

dpsi = diff(psi,x);
ddpsi = diff(dpsi,x);

```

```

syms y;
syms z;

```

Anexo C.Rotinas

```
%derivadas
du = cell(1,np);
dv = cell(1,np);
dw = cell(1,np);
ddw = cell(1,np);

for i = 1 : np
    du{i} = diff(u{i},y);
    dv{i} = diff(v{i},y);
    dw{i} = diff(w{i},y);
    ddw{i} = diff(dw{i},y);
end

%montagem da matriz qsiM 3xN*3 para cada parede
QM = cell(1,np);
Qm = cell(np,NgaussY);
for i = 1 : np
    QM{i} = sym(zeros(3,3*N));
    for j = 1 : N
        QM{i}(1,j) = (1/J0{i})*(Kloc(2,:,i)*w{i}(j) - Kloc(3,:,i)*v{i}(j));
        QM{i}(1,2*N+j) = (1/J0{i})*u{i}(j);
        %comentario porque estas variaveis sao 0 para o nosso problema
        %QM{i}(2,j) = dv{i}(j);
        %QM{i}(3,N+j) = simplify(du{i}(j)*R(i,1) + v{i}(j)*R(i,2) + u{i}(j)*R(i,3));
    end
    for k = 1 : NgaussY
        PosY = (Gauss{NgaussY}(1,k))*b(i)/2;
        Qm{i,k} = subs(QM{i},y,PosY);
    end
end

%montagem da matriz qsiB 3xN*3 para cada parede
QB = cell(1,np);
Qb = cell(np,NgaussY);
%modelo simplificado
%{
for i = 1 : np
    QB{i} = sym(zeros(3,3*N));
    for j = 1 : N
        QB{i}(1,j) = -1/J0{i}*Kloc(3,:,i)*dw{i}(j);
        QB{i}(1,2*N+j) = 1/J0{i}*w{i}(j);
        QB{i}(2,j) = ddw{i}(j);
        QB{i}(3,N+j) = 2*dw{i}(j);
    end
    for k = 1 : NgaussY
        PosY = (Gauss{NgaussY}(1,k))*b(i)/2;
        Qb{i,k} = subs(QB{i},y,PosY);
    end
end
%}
%modelo refinado
for i = 1 : np
    QB{i} = sym(zeros(3,3*N));
```

```

for j = 1 : N
    QB{i}(1,j) = 1/J0{i}*(-Kloc(3,:,i)*dw{i}(j));
    QB{i}(1,2*N+j) = 1/J0{i}*(1/J0{i}*(w{i}(j)-Kloc(2,:,i)*u{i}(j)));
    QB{i}(2,j) = ddw{i}(j);
    QB{i}(3,N+j) = 1/J0{i}*(2/J0{i}*Kloc(3,:,i)*(w{i}(j)-Kloc(2,:,i)*u{i}(j))+2*
        dw{i}(j) - Kloc(2,:,i)*du{i}(j));
    %faixas finitas
    QB{i}(3,N+j) = 1/J0{i}*(2/J0{i}*Kloc(3,:,i)*(w{i}(j)-Kloc(2,:,i)*u{i}(j))+2*
        dw{i}(j) - 2*Kloc(2,:,i)*du{i}(j));
end
for k = 1 : NgaussY
    PosY = (Gauss{NgaussY}(1,k))*b(i)/2;
    Qb{i,k} = subs(QB{i},y,PosY);
end
end

%montagem da matriz qsie
syms z;
Qel = cell(1,np);
for i = 1 : np
    Qel{i} = QM{i} - z*QB{i};
end

%matriz psi final com derivadas, Mpsi
mpsi = [psi;dpsi;ddpsi];
Mpsi = cell(1,NgaussX);
for i = 1 : NgaussX
    PosX = (1 + Gauss{NgaussX}(1,i))*1/2;
    Mpsi{i} = subs(mpsi,x,PosX);
end

%montagem da matriz B para cada parede
APsi = cell(1,np);
for i = 1 : np
    APsi{i} = Qel{i}*mpsi;
end

%montagem da matriz Qsiu * mPsi para calculo dos deslocamentos posteriores
Qu = cell(1,np);
for i = 1 : np
    Qu{i} = sym(zeros(3,2*N));
    for j = 1 : N
        Qu{i}(1,N+j) = u{i}(j);
        Qu{i}(2,j) = v{i}(j);
        Qu{i}(3,j) = w{i}(j);
    end
end

mPsi = [psi;dpsi];
apSI = cell(1,np);
for i = 1 : np
    apSI{i} = Qu{i}*mPsi;
end
end

```

C.3 Rotina *CalcularKt*

```
function Kt = CalcularKt(N,Nwarping,ne,np,Qm,Qb,Mpsi,NgaussX,NgaussY,NgaussZ,Gauss,l
    ,b,esp,Cm,Cf,apoiios,K3,GamaA,Kloc)

KG = zeros(2*N*ne + 2*N-Nwarping);
syms x y z;

for n = 1 : ne
    Ke = zeros(Nwarping*3 + (N - Nwarping)*4);
    for ii = 1 : NgaussX
        for n2 = 1:np
            for iii = 1 : NgaussY
                PosY = (Gauss{NgaussY}(1,iii))*b(n2)/2;
                for iiiii = 1 : NgaussZ
                    PosZ = (Gauss{NgaussZ}(1,iiiii))*esp(n2)/2;
                    Peso = Gauss{NgaussX}(2,ii)*Gauss{NgaussY}(2,iii)*Gauss{NgaussZ}
                        (2,iiiii)*(1+GamaA(n2)-Kloc(3, :,n2)*PosY);
                    Keponto = Peso*1*esp(n2)*(b(n2)/8)*(transpose(Qm{n2,iii}*Mpsi{iii})
                        *Cm{n2}*Qm{n2,iii}*Mpsi{iii}+PosZ^2*transpose(Qb{n2,iii}*Mpsi{
                        ii})*Cb{n2}*Qb{n2,iii}*Mpsi{ii});
                    Ke = Ke + Keponto;
                end
            end
        end
    end
    salto = 2*N*(n-1);
    for i = 1 : Nwarping*3 + (N-Nwarping)*4
        for j = 1 : Nwarping*3 + (N-Nwarping)*4
            KG(i+salto,j+salto) = KG(i+salto,j+salto) + Ke(i,j);
        end
    end
end
Kt = KG;

for i = 2*N-Nwarping:-1:1
    if apoiios(1,2*N+i)==1
        Kt(i+(2*N*ne+2*N-Nwarping)-(2*N-Nwarping),:)=[];
        Kt(:,i+(2*N*ne+2*N-Nwarping)-(2*N-Nwarping))=[];
    end
end

for i = 2*N-Nwarping:-1:1
    if apoiios(1,i)==1
        Kt(i,:)=[];
        Kt(:,i)=[];
    end
end
end
end
```

C.4 Rotina *figura*

```
%Escala e divisoes dos elementos finitos
```

```

fesc = 2.5; %fator de escala
ndivx = 4;
ndivy = 4;

%Plot da indeformada
read(symengine,'auxiliar.mu');
output = feval(symengine,'desenho',ne,N,NGLe,d,np,apSI,APsi,El,raio,b,fesc,ndivx,
    ndivy,l,alfa,LA);

V = double(output(1));
F = double(output(2));

axis equal;
patch('Vertices',V,'Faces',F,'FaceColor','none','EdgeColor',[0 0 1]);
hold on;

%Plot da deformada
Face = zeros(ndivx*ndivy*np*ne,4);
k = 1;
for i = 1 : ndivx*ndivy*np*ne
    for j = 1 : 4
        Face(i,j) = k;
        k = k + 1;
    end
end

vndef = double(output(3));
cctens = double(output(4));

patch('Vertices',vndef,'Faces',Face,'FaceVertexCData',cctens,'FaceColor','interp','
    EdgeColor',[0 0 0]);
hold off;
colorbar;

```

C.5 Rotina *auxiliar*

```

desenho := proc(ne,N,NGLe,d,np,apSI,APsi,El,raio,b,fesc,ndivx,ndivy,l,alfa,LA)
begin

    DIGITS := 16 : raio = float(raio) : l := float(l) : apSI := float(apSI) : APsi
        := float(APsi) :

    B := matrix(1,np):
    Ee := matrix(1,np):
    if np = 1 then
        B[1] := b:
        Ee[1] := El:
    else
        for i from 1 to np do
            B[i] := b[i]:
            Ee[i] := El[i]:
        end_for:
    end_if:
end

```

Anexo C.Rotinas

```
/////indeformada/////

R := array(1..np):
if np = 1 then
  R[1] := matrix(3,3,[[1,0,0],[0,cos(alfa),-sin(alfa)],[0, sin(alfa), cos(alfa)
]])):
else
  for a from 1 to np do
    R[a] := matrix(3,3,[[1,0,0],[0,cos(alfa[a]),-sin(alfa[a])],[0, sin(alfa[a]
)], cos(alfa[a])]]):
  end_for:
end_if:

V := matrix(2*np*(ne+1),3):
for t from 1 to ne+1 do
  xel := 0:
  teta := ((t-1)*l + xel)/raio:
  Lambda := matrix(3,3,[[cos(teta),-sin(teta),0],[sin(teta),cos(teta)
],0],[0,0,1]]):
  r0 := raio*matrix(3,1,[sin(teta),-cos(teta),0]):
  for p from 1 to np do
    L1 := matrix(3,1,[0,-B[p]/2,0]):
    L2 := matrix(3,1,[0,B[p]/2,0]):
    vetor := linalg::col(LA,p):
    V:= linalg::setRow(V,2*np*(t-1)+2*(p-1)+1,transpose(r0+Lambda*(vetor + R[
p]*L1))):
    V:= linalg::setRow(V,2*np*(t-1)+2*(p-1)+2,transpose(r0+Lambda*(vetor + R[
p]*L2))):
  end_for:
end_for:

F := matrix(ne*np,4):
for f from 1 to ne*np do
  F[f,1] := 2*f - 1:
  F[f,2] := 2*f - 1 + 2*np:
  F[f,3] := 2*f + 2*np:
  F[f,4] := 2*f:
end_for:

/////deformada/////

U := array(1..np):
VV := array(1..np):
vv := array(1..ne):
CC := array(1..np):
Tens := array(1..np):
cc := array(1..ne):

for n from 1 to ne do
  aux1 := (n-1)*2*N+1:
  aux2 := aux1 + NGLe - 1:
  del := linalg::submatrix(d,aux1..aux2,1..1):
  vv[n] := matrix(4+4*(ndivy-1)+4*ndivy*(ndivx-1)+4*ndivx*ndivy*(np-1),3):
  cc[n] := matrix(4+4*(ndivy-1)+4*ndivy*(ndivx-1)+4*ndivx*ndivy*(np-1),1):
```

```

for n2 from 1 to np do
  if np = 1 then
    U[n2] := fesc*(apSI*del):
    Tens[n2] := eval(subs(APsi*del, z=0)):
    CC[n2] := Ee[n2]*Tens[n2][1,1]:
  else
    U[n2] := fesc*(apSI[n2]*del):
    Tens[n2] := eval(subs(APsi[n2]*del, z=0)):
    CC[n2] := Ee[n2]*Tens[n2][1,1]:
  end_if:

  for i from 1 to ndivx do
    xini := l/ndivx*(i-1):
    xfin := xini + l/ndivx:

    tetaini := ((n-1)*l+xini)/raio:
    Lambdaini := matrix(3,3,[[cos(tetaini),-sin(tetaini),0],[sin(tetaini),
      cos(tetaini),0],[0,0,1]]):
    r0ini := raio*matrix(3,1,[sin(tetaini),-cos(tetaini),0]):

    tetafin := ((n-1)*l+xfin)/raio:
    Lambdafin := matrix(3,3,[[cos(tetafin),-sin(tetafin),0],[sin(tetafin),
      cos(tetafin),0],[0,0,1]]):
    r0fin := raio*matrix(3,1,[sin(tetafin),-cos(tetafin),0]):

    for ii from 1 to ndivy do
      yini := -B[n2]/2 + B[n2]/ndivy*(ii-1):
      yfin := yini + B[n2]/ndivy:

      pos := 1 + 4*(ii-1) + 4*ndivy*(i-1) + 4*ndivx*ndivy*(n2-1):
      vetor := linalg::col(LA,n2):

      vv[n] := linalg::setRow(vv[n],pos,transpose(r0ini + Lambdaini*(
        vetor+R[n2]*(matrix(3,1,[0,yini,0]) + eval(subs(U[n2],x =
          xini, y = yini)))))):
      vv[n] := linalg::setRow(vv[n],pos+1,transpose(r0ini + Lambdaini*(
        vetor+R[n2]*(matrix(3,1,[0,yfin,0]) + eval(subs(U[n2],x =
          xini, y = yfin)))))):
      vv[n] := linalg::setRow(vv[n],pos+2,transpose(r0fin + Lambdafin*(
        vetor+R[n2]*(matrix(3,1,[0,yfin,0]) + eval(subs(U[n2],x =
          xfin, y = yfin)))))):
      vv[n] := linalg::setRow(vv[n],pos+3,transpose(r0fin + Lambdafin*(
        vetor+R[n2]*(matrix(3,1,[0,yini,0]) + eval(subs(U[n2],x =
          xfin, y = yini)))))):

      cc[n][pos,1] := eval(subs(CC[n2],x = xini, y = yini)):
      cc[n][pos+1,1] := eval(subs(CC[n2],x = xini, y = yfin)):
      cc[n][pos+2,1] := eval(subs(CC[n2],x = xfin, y = yfin)):
      cc[n][pos+3,1] := eval(subs(CC[n2],x = xfin, y = yini)):
    end_for:
  end_for:
end_for:

```

```
vvdef := vv[1]:
cctens := cc[1]:

for i from 2 to ne do
  vvdef := linalg::stackMatrix(vvdef,vv[i]):
  cctens := linalg::stackMatrix(cctens,cc[i]):
end_for:

[V,F,vvdef,cctens]

end_proc:
```