



**David Ventura Manta**

Licenciado em Ciências de Engenharia Civil

## **Um elemento finito de barra tridimensional geometricamente exato incluindo empenamento**

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Civil

Orientador: Rodrigo de Moura Gonçalves, Professor Auxiliar,  
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutor Válder José da Guia Lúcio  
Arguente: Prof. Doutor Manuel da Cunha Ritto Corrêa  
Vogal: Prof. Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves



“Copyright” David Ventura Manta, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

A presente dissertação constitui o culminar de um trabalho que só se tornou possível com o contributo das mais diversas pessoas, a quem expresso o meu agradecimento.

Em primeiro lugar quero deixar o meu sentido agradecimento ao meu orientador científico, o Professor Rodrigo Gonçalves, por toda a disponibilidade, sabedoria e inesgotável paciência para comigo no decorrer desta dissertação. Um exemplo que jamais esquecerei.

À minha família, em particular mãe e irmão, por todo o incentivo e esforço que fizeram ao longo do meu percurso académico, para que pudesse alcançar os meus objetivos.

À Inês o meu obrigado por todo o incentivo, carinho e apoio incondicional que me dedicou.

Deixo também um especial agradecimento ao meu amigo Pedro Mateus, pelas infindáveis horas de conversa e a sua boa disposição, o que me mostrou que com humor tudo é mais fácil.

Aos meus amigos de longa data, Nuno Sousa, Décio Orlando e em especial ao Tiago Marques, por todo o companheirismo. Agradeço igualmente aos amigos que me acompanharam nestes anos de faculdade, Jorge Rebelo, Bruno Correia, Nuno Peres, Gonçalo Palma, Hugo Rebelo, Marlene Melo, Ana Amorim e Inês Toscano.

A todos os demais que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta dissertação, o meu obrigado.



# Resumo

Neste trabalho desenvolve-se uma formulação geometricamente exata para barras esbeltas de eixo reto ou curvo, com movimento no espaço tridimensional. A designação “geometricamente exata” é utilizada em virtude de a teoria subjacente permanecer válida independentemente da magnitude dos deslocamentos envolvidos. Tendo em conta que se pretende modelar barras esbeltas, admite-se que a hipótese de Bernoulli é válida, pelo que a descrição cinemática de cada secção transversal é efetuada com apenas três parâmetros: (i) o vetor que referencia a posição do seu “centro”, (ii) o ângulo de torção e (iii) a amplitude da função de empenamento associada à torção. A rotação da secção é obtida a partir da tangente ao eixo e do ângulo de torção, o que resulta numa formulação significativamente complexa do ponto de vista algébrico. No entanto, obtêm-se todas as relações e equações relevantes. Desenvolve-se e implementa-se um elemento finito recorrendo à aproximação dos parâmetros cinemáticos. O elemento é intrinsecamente insensível à retenção de corte mas é afetado pela retenção de membrana, a qual é mitigada recorrendo a uma integração reduzida. Apresentam-se vários exemplos que ilustram as potencialidades do elemento finito no campo da modelação numérica de barras de eixo reto/curvo sujeitas a grandes deslocamentos.

## Palavras chave:

- Teoria de vigas geometricamente exata
- Elementos finitos de barra
- Grandes deslocamentos
- Empenamento da secção



# Abstract

## **A geometrically exact 3D beam finite element including warping**

In this work, a geometrically exact formulation for straight or curved 3D slender beams is developed. The term “geometrically exact” is employed due to the fact that the underlying theory is valid independently of the magnitude of the displacements involved. Since the formulation is designed for slender bars, Bernoulli’s assumption is assumed valid and consequently the kinematic description of each cross-section is based on three parameters: (i) the position vector of the cross-section center, (ii) the torsion angle and (iii) the amplitude of the torsion-related warping function. The cross-section rotation is obtained from the beam axis tangent vector and the torsion angle, resulting in a significantly complex formulation from an algebraic point of view. Nevertheless, all relevant relations and equations are derived. A displacement-based finite element is developed and implemented. The element is intrinsically insensitive to shear locking but is sensitive to membrane locking, which is mitigated through reduced integration. Several examples are presented, to show the potential of the proposed finite element in the field of the numerical modelling of straight/curved bars subjected to large displacements.

### **Keywords:**

- Geometrically exact beam theory
- Beam finite elements
- Large displacements
- Cross-section warping



# Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de símbolos	xv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações gerais . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	2
1.3 Organização da dissertação . . . . .	3
1.4 Notação e conceitos fundamentais . . . . .	3
<b>2 Formulação geometricamente exata para barras esbeltas</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução . . . . .	7
2.2 Descrição cinemática . . . . .	7
2.3 Deformação . . . . .	9
2.4 Equações de equilíbrio . . . . .	10
2.5 Parametrização do tensor de rotação . . . . .	14
2.6 Equações em termos das variáveis fundamentais . . . . .	19
2.7 Formulação de um elemento finito . . . . .	23
2.8 Movimento plano . . . . .	27
2.9 Implementação computacional . . . . .	29
2.9.1 Rotina de controle . . . . .	29
2.9.2 Determinação de matrizes/vetores . . . . .	32
2.9.3 Representação gráfica de resultados . . . . .	32
<b>3 Exemplos de aplicação</b>	<b>35</b>
3.1 Introdução . . . . .	35
3.2 Exemplos relativos a vigas retas em movimento no plano . . . . .	35

## Índice de Matérias

---

3.2.1	Força axial . . . . .	36
3.2.2	Força transversal vertical . . . . .	38
3.2.3	Momento concentrado . . . . .	38
3.3	Exemplos relativos a vigas curvas em movimento plano . . . . .	43
3.3.1	Viga em consola com carga pontual . . . . .	44
3.3.2	Arco de $215^\circ$ . . . . .	44
3.4	Exemplos relativos a vigas retas em movimento no espaço . . . . .	48
3.4.1	Torção uniforme . . . . .	48
3.4.2	Torção não-uniforme . . . . .	50
3.4.3	Consola com secção quadrada à flexão reta sem torção . . . . .	50
3.4.4	Encurvadura lateral de uma consola com secção em I . . . . .	52
3.5	Exemplos relativos a vigas curvas em movimento no espaço . . . . .	57
3.5.1	Viga curva de Bathe e Bolourchi . . . . .	57
3.5.2	Viga helicoidal . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>61</b>
4.1	Conclusões e principais contribuições . . . . .	61
4.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	61
	<b>Bibliografia</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Rotinas desenvolvidas em MATLAB</b>	<b>67</b>
A.1	Introdução de dados . . . . .	67
A.1.1	Viga reta, caso plano . . . . .	67
A.1.2	Viga curva, caso plano . . . . .	67
A.1.3	Viga reta, caso tridimensional . . . . .	68
A.2	Procedimento incremental/iterativo . . . . .	68
A.2.1	Viga curva, caso plano. Controle em termos de carga . . . . .	68
A.2.2	Viga reta, caso tridimensional. Controle em termos de carga . . . . .	71
A.2.3	Viga reta, caso tridimensional. Controle em termos de deslocamentos . . . . .	73
<b>B</b>	<b>Rotinas desenvolvidas em MuPAD</b>	<b>77</b>
B.1	Funções de interpolação . . . . .	77
B.1.1	Caso bidimensional . . . . .	77
B.1.2	Caso tridimensional . . . . .	78
B.2	Matriz de rigidez tangente e vetor das forças interiores . . . . .	78
B.2.1	Viga reta, caso plano. Com momento fletor pontual aplicado . . . . .	78
B.2.2	Viga curva, caso plano . . . . .	81
B.2.3	Viga reta, caso tridimensional . . . . .	83
B.3	Auxiliar para representação gráfica . . . . .	85
B.3.1	Viga curva, caso plano . . . . .	85
B.3.2	Viga reta, caso tridimensional . . . . .	86

# Índice de Figuras

2.1	Configuração de (a) referência, (b) inicial e (c) atual de uma barra. . . . .	8
2.2	Notação para aplicação do Teorema de Green. . . . .	13
2.3	Parametrização das rotações. . . . .	15
2.4	Definição das componentes da curvatura espacial para $\mathbf{t}' \neq \mathbf{0}$ . . . . .	17
2.5	Polinômios cúbicos de Hermite. . . . .	24
2.6	Movimento plano: configuração (a) de referência, (b) inicial e (c) atual. . . . .	27
2.7	Método de Newton-Raphson (sistema com um grau de liberdade). . . . .	30
2.8	Representação gráfica: (a) de coordenadas dos nós, (b) função de empenamento e (c) visualização tridimensional de configurações da barra. . . . .	33
3.1	Viga reta em consola. . . . .	35
3.2	Soluções para força axial, obtidas usando os pares $\mathbf{S-E}$ e $\mathbf{P-H}$ . . . . .	37
3.3	Consola com força vertical: (a) Diagrama carga – deslocamento e (b) configurações deformadas. . . . .	39
3.4	Consola com momento concentrado: avaliação do efeito de retenção para (a) integração com 10 pontos de Gauss e (b) integração com 3 pontos de Gauss. . . . .	41
3.5	Consola com momento concentrado: (a) distância à origem do ponto da extremidade livre e (b) configurações deformadas. . . . .	42
3.6	Transformação de coordenadas. . . . .	43
3.7	Viga curva em consola. . . . .	44
3.8	Viga curva em consola: (a) diagrama carga – deslocamento e (b) configurações deformadas. . . . .	45
3.9	Arco de $215^\circ$ . . . . .	45
3.10	Arco de $215^\circ$ : (a) Trajetórias de equilíbrio e configurações deformadas (b) antes do primeiro ponto limite e (c) após o segundo ponto limite. . . . .	47
3.11	Vigas retas consideradas nos exemplos com movimento no espaço tridimensional. . . . .	48
3.12	Torção uniforme: configurações deformadas. . . . .	49
3.13	Torção não-uniforme: (a) configurações deformadas e (b) rotação de torção ao longo do comprimento da barra. . . . .	51
3.14	Trajetórias de rotações. . . . .	52

## Índice de Figuras

---

3.15	Consola com secção quadrada à flexão reta sem torção: (a-b) configurações deformadas obtidas com o elemento proposto (o último caso corresponde a um alçado frontal) e (c) deslocamento máximo em função da direção do carregamento. . . .	53
3.16	Encurvadura lateral: diagramas carga-deslocamento. . . . .	55
3.17	Encurvadura lateral: configurações deformadas. . . . .	56
3.18	Geometria e carregamento da viga curva de Bathe e Bolourchi. . . . .	57
3.19	Viga curva de Bathe e Bolourchi: configurações deformadas (a) em alçado no plano ( $X_1, X_2$ ) e (b) em perspetiva. . . . .	58
3.20	Viga helicoidal: (a) geometria e carregamento, (b) evolução da extensão inicial e (c) da curvatura de torção inicial devida a $\mathbf{t}$ , para 16 EF. . . . .	59
3.21	Viga helicoidal: configurações deformadas. . . . .	60

# Índice de Tabelas

3.1	Arco de $215^\circ$ : valor da carga no primeiro ponto limite. . . . .	46
3.2	Encurvadura lateral: cargas de bifurcação. . . . .	54
3.3	Viga curva de Bathe e Bolourchi: deslocamento vertical da extremidade livre para $F_2 = 600$ . . . . .	58
3.4	Viga helicoidal: deslocamento da extremidade livre para $F_3 = 0, 20$ . . . . .	60



# Lista de símbolos

## Operações

- $\times$  produto externo de vetores
- $\cdot$  produto interno de vetores
- $:$  produto interno de tensores de segunda ordem
- $\otimes$  produto tensorial de dois vetores

## Operações especiais e índices

- $\| \|$  norma de um vetor
- $\widetilde{(\ )}$  tensor anti-simétrico associado a um vetor
- $(\ )^{-1}$  tensor inverso de um tensor
- $(\ )_{,i}$  derivada em ordem a  $X_i$
- $(\ )'$  derivada em ordem a  $X_3$
- $(\ )_0$  referente à configuração inicial
- $(\ )^t$  transposta
- $\hat{(\ )}$  variação de uma grandeza entre as configurações atual e inicial
- $\Delta(\ )$  variação incremental ou iterativa
- $\delta(\ )$  variação virtual
- $\text{axi}(\ )$  vetor axial de um tensor anti-simétrico
- $\det(\ )$  determinante de um tensor

## Letras Latinas Maiúsculas

- $\mathbf{0}$  tensor ou vetor nulo
- $\mathbf{1}$  tensor identidade
- $E$  módulo de elasticidade
- $\mathbf{E}$  tensor de deformação de Green-Lagrange

## Lista de símbolos

---

- $\mathbf{E}_i$  versores dos eixos materiais
- $\mathbf{F}$  gradiente de deformação
- $\mathcal{F}$  vetor das forças exteriores
- $\overline{\mathcal{F}}$  perfil de carregamento
- $G$  módulo de distorção
- $\mathcal{G}$  vetor das forças desequilibradas
- $\mathbf{H}$  tensor das deformações utilizado por J. Simo
- $I_1$  e  $I_2$  momentos centrais principais de inércia da secção transversal
- $I_3$  momento polar de inércia da secção transversal
- $I_\omega$  constante de empenamento
- $J$  fator de rigidez à torção de Saint-Venant
- $\mathbf{K}$  vetor das curvaturas
- $\mathbf{K}_t$  vetor da curvatura devida a  $\mathbf{t}$
- $\mathbf{K}_\varphi$  vetor da curvatura devida a  $\varphi$
- $\mathbf{K}_{flex}$  vetor da curvatura de flexão devida a  $\mathbf{t}$
- $\mathbf{K}_{tor}$  vetor da curvatura de torção devida a  $\mathbf{t}$
- $\mathcal{K}$  matriz de rigidez tangente
- $L$  comprimento
- $\mathbf{M}$  vetor dos momentos fletores e torsor
- $N$  esforço axial
- $\mathbf{P}$  tensor das tensões utilizado por J. Simo
- $\mathcal{Q}$  vetor das forças interiores
- $R$  raio de curvatura
- $\mathbf{S}$  segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
- $V$  volume na configuração de referência
- $W_{int}$  trabalho das forças interiores
- $W_{ext}$  trabalho das forças exteriores
- $\mathbf{X}$  vetor de posição de um ponto material na configuração de referência

### Letras Latinas Minúsculas

- $a$  dimensão de uma secção transversal quadrada
- $b$  largura do banzo do perfil de aço
- $\mathbf{d}$  vetor que contém os graus de liberdade do elemento finito
- $\mathbf{g}_i$  vetor que quantifica a deformação de fibras orientadas segundo  $X_i$  na configuração de referência, deduzindo o efeito da rotação da secção
- $h$  altura do perfil de aço
- $l$  comprimento do elemento finito
- $\mathbf{l}$  vetor que referencia a posição de um ponto da secção transversal em relação ao seu centro, num referencial que acompanha a rotação da secção
- $\mathbf{n}$  normal exterior unitária à fronteira que delimita a secção transversal na configuração de referência
- $p$  amplitude associada à função de empenamento
- $\mathbf{p}$  primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
- $\mathbf{r}$  vetor que referencia a posição do eixo da barra
- $t_f$  espessura do banzo do perfil de aço
- $t_w$  espessura da alma do perfil de aço
- $\mathbf{t}$  vetor unitário tangente ao eixo da barra
- $\mathbf{u}$  vetor de deslocamento entre as configurações de referência e atual
- $\mathbf{x}$  vetor de posição de um ponto material na configuração atual

### Letras Gregas

- $\gamma$  distorção
- $\mathbf{\Gamma}$  vetor de deformação que quantifica a extensão axial e a distorção por corte
- $\Gamma$  extensão axial do eixo para barras vigas de Euler-Bernoulli
- $\epsilon$  extensão longitudinal
- $\theta$  vetor de rotação
- $\Theta_D$  matriz associada a uma derivada direcional
- $\Theta_{D^2}$  matriz associada a uma segunda derivada direcional
- $\lambda$  parâmetro de carga
- $\mathbf{\Lambda}$  tensor de rotação

## Lista de símbolos

---

- $\nu$  coeficiente de Poisson
- $\Xi_D$  tensor associado a uma derivada direcional
- $\Xi_{D^2}$  tensor associado a uma segunda derivada direcional
- $\sigma$  par conjugado de tensão de  $\epsilon$
- $\tau$  par conjugado de tensão de  $\gamma$
- $\varphi$  rotação de torção
- $\phi$  variável que agrupa todas as variáveis cinemáticas fundamentais
- $\Phi$  matriz que agrupa  $\phi$ ,  $\phi'$  e  $\phi''$
- $\psi_i$  função de interpolação
- $\psi$  matriz que agrupa as funções de interpolação
- $\Psi$  matriz que agrupa  $\psi$ ,  $\psi'$  e  $\psi''$
- $\omega$  função de empenamento
- $\Omega$  secção transversal; área da secção transversal
- $\nabla$  vetor gradiente
- $\nabla^2$  Laplaciano
- $\partial\Omega$  fronteira da secção transversal

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

A evolução natural da indústria da construção tem fomentado a adoção de sistemas estruturais com cada vez menor impacto visual com a envolvente e, por conseguinte, cada vez mais esbeltos e flexíveis. Assim, estes sistemas têm-se tornado progressivamente mais suscetíveis a fenómenos geometricamente não-lineares complexos (*e.g.*, interações local-global), os quais requerem uma análise cuidada. Embora se tenha verificado um avanço significativo no campo das ferramentas de modelação numérica (os programas de elementos finitos), as análises não-lineares exigem o domínio de conceitos teóricos avançados, envolvem um tempo de cálculo significativo e os resultados são de difícil interpretação. O que foi referido é especialmente válido para modelos de elementos finitos sólidos e de casca, os quais envolvem um número muito grande de graus de liberdade e requerem um grande dispêndio de tempo ao nível do pré e pós-processamento. Todos estes fatores levam a que as análises não-lineares não sejam frequentemente utilizadas pelos Projetistas (Gonçalves, 2007), apesar de os regulamentos modernos já o permitirem (*e.g.*, o Eurocódigo 3 — CEN, 2010).

Em alternativa, podem utilizar-se elementos finitos baseados numa teoria de peças lineares. De acordo com a definição usual, uma peça linear prismática é um corpo que pode ser gerado quando o centro geométrico de uma figura plana (a secção transversal) se move ao longo de uma linha (o eixo da barra) de comprimento muito superior às dimensões da figura plana. Nesta definição é ainda corrente referir que a secção transversal permanece perpendicular ao eixo (pelo menos na configuração inicial da barra), o que é seguido no presente trabalho. A análise estrutural de peças lineares prismáticas — doravante designadas simplesmente por *barras* — é simultaneamente simples e eficiente, dado que é baseada em grandezas com carácter unidimensional, *i.e.*, grandezas que variam ao longo do eixo e não na secção transversal, tais como esforços e medidas de deformação da secção (*e.g.*, momento fletor, curvatura). A preferência, por parte dos Projetistas, pela utilização de modelos de elementos finitos de barra resulta da inerente simplicidade, eficiência e facilidade na interpretação de resultados. Como consequência, tem sido despendido um esforço considerável para desenvolver este tipo de elementos finitos, no sentido de incluir efeitos não-lineares cada vez mais complexos, tanto geométricos como materiais.

As teorias de vigas ditas geometricamente exatas distinguem-se pela sua validade estar assegurada independentemente da magnitude dos deslocamentos e rotações envolvidos. Note-se que o interesse destas teorias não se cinge exclusivamente à modelação do comportamento em grandes deslocamentos — aliás, a maioria das estruturas permanece nos pequenos a mode-

rados deslocamentos —, mas também resulta do facto de a descrição cinemática ser tratada de forma rigorosa, o que permite capturar facilmente efeitos geometricamente não-lineares complexos que ocorrem mesmo para moderados deslocamentos. A título de exemplo, menciona-se o efeito que a altura do ponto de aplicação da carga produz no valor do momento crítico de instabilidade lateral de vigas, um efeito que é facilmente capturado com uma formulação geometricamente exata (ver, por exemplo, Gonçalves, 2012).

Os trabalhos pioneiros relativos a teorias geometricamente exatas devem-se a Reissner (1972), que estudou o caso plano, e a Simo (1985), que o generalizou para o caso tridimensional — aliás, a introdução do conceito “geometricamente exato” deve-se a Simo. Para o caso tridimensional, considera-se que cada secção transversal é referenciada pela sua posição e a sua rotação, o que corresponde a considerar seis graus de liberdade, três associados a translações e três parâmetros para ter em conta a rotação. Posteriormente, Simo e Vu-Quoc (1991) incluíram mais um grau de liberdade associado ao empenamento devido à torção e, subsequentemente, vários outros autores apresentaram outros desenvolvimentos e melhoramentos — uma revisão bibliográfica pode ser encontrada, por exemplo, em Gonçalves et al. (2010). Uma característica fundamental destas formulações tridimensionais é o facto de utilizarem genuínas rotações como graus de liberdade, cujo tratamento está longe de ser trivial.

Para barras esbeltas, é lícito admitir-se que a deformação por corte é desprezável e, portanto, que a secção transversal permanece perpendicular ao eixo da barra após deformação, como acontece na teoria da flexão de Euler-Bernoulli e na teoria tridimensional de Kirchhoff (Kirchhoff, 1859). Com base nesta hipótese torna-se possível descrever a posição da secção transversal com um número mais reduzido de parâmetros, tipicamente (i) as três componentes do vetor que referencia o eixo da peça, cujo vetor tangente define a normal da secção transversal, e (ii) uma rotação para definir a orientação dos eixos da secção no seu plano. O desenvolvimento desta descrição no âmbito de uma teoria geometricamente exata foi efetuado por Boyer e Primault (2004), muito embora apenas para secções circulares, para as quais não é necessário conhecer a orientação dos eixos no plano da secção (todos os eixos centrais são principais), o que simplifica consideravelmente as expressões. Por sua vez, Meier et al. (2014, 2015) apresentaram o desenvolvimento da formulação para secções arbitrárias (embora a apliquem apenas a secções sem empenamento e com dupla simetria).

## 1.2 Objetivos

O objetivo fundamental desta dissertação consiste em desenvolver, implementar e validar um elemento finito de barra baseado numa teoria geometricamente exata que não inclui a deformação por corte (tal como a teoria de Euler-Bernoulli para o caso plano e a teoria de Kirchhoff para o caso tridimensional), pelo que as secções transversais permanecem perpendiculares ao eixo da barra após deformação. Deve salientar-se que, em relação ao elemento de Meier et al. (2014, 2015), o trabalho desenvolvido apresenta as seguintes contribuições originais:

- (i) introduz-se um grau de liberdade adicional, associado ao empenamento devido à torção;
- (ii) todas as relações fundamentais, nomeadamente as relações cinemáticas, são claramente demonstradas;
- (iii) a linearização das equações de equilíbrio é escrita em termos dos parâmetros interpolados diretamente pelo método dos elementos finitos.

Para além do que foi referido, constituem objetivos do presente trabalho o desenvolvimento de um programa em MATLAB (The Mathworks, 2014) para realizar análises geometricamente não-lineares com o elemento finito proposto, tratar os resultados obtidos e proceder à sua visualização (nomeadamente de configurações deformadas). Pretende-se também que o trabalho realizado contribua para o desenvolvimento e divulgação dos elementos finitos de barra geometricamente exatos.

### 1.3 Organização da dissertação

A dissertação desenvolve-se ao longo de quatro capítulos, os quais se descrevem resumidamente de seguida:

- (i) O primeiro capítulo, correspondente ao presente capítulo, estabelece a introdução aos assuntos abordados no decorrer da dissertação.
- (ii) O segundo capítulo é dedicado ao desenvolvimento da formulação proposta. Começa-se por apresentar a descrição cinemática da barra, prosseguindo com a determinação das medidas de deformação e das equações de equilíbrio. De seguida, aborda-se a parametrização do tensor de rotação da secção e desenvolvem-se as equações fundamentais em termos das variáveis a interpolar no contexto do método dos elementos finitos. Procedem-se ainda à descrição do elemento finito proposto e particularizam-se as equações para o caso plano. O capítulo termina com a discussão de aspetos relativos à implementação computacional.
- (iii) O terceiro capítulo apresenta vários exemplos de aplicação, com o objetivo de ilustrar as potencialidades do elemento proposto. Abordam-se casos planos e tridimensionais, com barras de eixo reto e curvo. Os resultados obtidos com o elemento proposto são comparados com soluções analíticas (quando estas existem), resultados obtidos por outros autores e soluções obtidas com modelos de elementos finitos de barra/casca convencionais.
- (iv) O quarto capítulo encerra o presente trabalho, com a apresentação das principais conclusões extraídas e dos desenvolvimentos futuros.

### 1.4 Notação e conceitos fundamentais

De modo a permitir uma mais clara leitura do documento, procede-se de seguida a uma exposição da notação empregue para as várias grandezas e operações entre elas. Efetua-se também uma revisão dos conceitos de álgebra tensorial utilizados no decorrer do texto, de acordo com o exposto no livro de Bonet e Wood (1997).

Nesta dissertação adota-se em geral a notação direta. Contudo, por uma questão de conveniência, emprega-se pontualmente a notação indicial, assim como a decomposição das expressões em termos de componentes, o que facilita por vezes o seu desenvolvimento e, conseqüentemente, a sua posterior implementação numérica. Na opinião do autor, a opção tomada proporciona uma mais fácil compreensão das expressões desenvolvidas, por via de uma escrita mais concisa e esclarecedora.

A formulação desenvolvida enquadra-se sempre no espaço (Euclideano) tridimensional em coordenadas Cartesianas. As grandezas tensoriais de 1ª ordem (vetores) ou de 2ª ordem são

## Capítulo 1. Introdução

---

representadas por letras em **negrito**. Quando é necessário referir as suas componentes, as grandezas tensoriais (e matrizes) inscrevem-se entre parênteses retos [ ]. Quanto à representação de grandezas escalares (incluindo componentes de matrizes), é efetuada por letras em *itálico*.

O produto interno entre dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , e entre dois tensores de 2ª ordem  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , define-se por

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ij}. \quad (1.2)$$

A norma de um vetor é indicada por  $\|\mathbf{a}\|$ , sendo dada por

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}. \quad (1.3)$$

A transformação nula e a transformação identidade representam-se, respetivamente, por  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{1}$ , verificando

$$\mathbf{0} \mathbf{a} = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{1} \mathbf{a} = \mathbf{a}, \quad (1.5)$$

para qualquer vetor  $\mathbf{a}$ .

Define-se a inversa  $\mathbf{A}^{-1}$  e a transposta  $\mathbf{A}^t$  de um tensor  $\mathbf{A}$ , tal que

$$\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{1}, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{A}^t \mathbf{a}), \quad (1.7)$$

para quaisquer vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . O tensor de 2ª ordem é simétrico se satisfaz  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$  e anti-simétrico se satisfaz  $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^t$ . Note-se que os tensores anti-simétricos possuem somente três componentes independentes, as quais podem ser agrupadas num vetor, designado por vetor axial (do tensor anti-simétrico). Por outro lado, dado um vetor  $\mathbf{a}$ , é possível definir um tensor anti-simétrico associado, que se representa com um “til”,  $\tilde{\mathbf{a}}$ , verificando a igualdade

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{a}} \mathbf{b} \quad (1.8)$$

para qualquer vetor  $\mathbf{b}$ , onde “ $\times$ ” designa o produto externo usual entre vetores. Por forma a estabelecer esta igualdade, verifica-se que as componentes de  $\tilde{\mathbf{a}}$  são dadas por

$$[\tilde{\mathbf{a}}] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Por sua vez, designa-se o vetor axial por

$$\mathbf{a} = \text{axi}(\tilde{\mathbf{a}}). \quad (1.10)$$

O produto tensorial entre dois vetores  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , é indicado pelo símbolo “ $\otimes$ ”, verificando a seguinte igualdade

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad (1.11)$$

para um qualquer vetor  $\mathbf{c}$ . Naturalmente, o resultado de  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$  é assim um tensor de 2<sup>a</sup> ordem.

As derivadas são representadas através de uma vírgula em índice inferior, seguida da variável em relação à qual se está a derivar (*e.g.*, se  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(X_1, X_2, X_3)$ , então  $\mathbf{a}_{,1} = \partial \mathbf{a} / \partial X_1$ ). Define-se contudo o caso particular de derivação  $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial X_3$ , o qual é recorrente nas expressões desenvolvidas ao longo do texto e como tal é introduzido por simplicidade de notação. Finalmente, uma variação virtual é representada por  $\delta$  e uma variação incremental/iterativa (no contexto do método de Newton-Raphson) por  $\Delta$ .



## Capítulo 2

# Formulação geometricamente exata para barras esbeltas

### 2.1 Introdução

No curso do presente capítulo desenvolve-se a formulação proposta, de acordo com as seguintes etapas: (i) descrição cinemática, onde se apresentam as hipóteses assumidas e a composição do movimento, (ii) estabelecimento das medidas de deformação adotadas, (iii) equações de equilíbrio e sua correspondente linearização, (iv) escolha da parametrização do tensor de rotação, (v) escrita das equações em termos das variáveis cinemáticas fundamentais e (vi) formulação do elemento finito de barra proposto. Aborda-se ainda o caso do movimento no plano (bidimensional), pela sua utilidade e relativa simplicidade, o qual constitui um caso particular da formulação geral. Finalmente, procede-se ao término do capítulo com a discussão dos aspetos relativos à implementação computacional, nomeadamente: (i) a rotina de controle da análise incremental/iterativa, (ii) a determinação de matrizes/vetores e (iii) a representação gráfica de resultados.

### 2.2 Descrição cinemática

Assente numa descrição Lagrangeana total, a posição da barra é definida em três configurações distintas (ver Figura 2.1): (i) a configuração de referência, onde a barra assume uma forma prismática reta, (ii) a configuração inicial, livre de solicitações, e (iii) a configuração atual, em geral deformada sob a ação das solicitações impostas. Adota-se um referencial ortonormado direto de eixos  $(X_1, X_2, X_3)$ , com vetores de base  $\mathbf{E}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Na configuração de referência o eixo da barra coincide com  $X_3 \in [0, L]$ , sendo  $L$  o comprimento, e a sua secção transversal  $\Omega$  permanece paralela ao plano formado pelos eixos  $(X_1, X_2)$ , cuja fronteira se denota por  $\partial\Omega$ . A posição de um ponto material na configuração de referência é dada por

$$\mathbf{X} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2 + X_3\mathbf{E}_3. \quad (2.1)$$

Na configuração atual, a barra é descrita por

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(X_3) + \mathbf{\Lambda}(X_3)\mathbf{l}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{r}$  posiciona o seu eixo,  $\mathbf{\Lambda}$  é um tensor que descreve a rotação da secção transversal e  $\mathbf{l}$  descreve a configuração da secção transversal num referencial que acompanha a sua rotação.

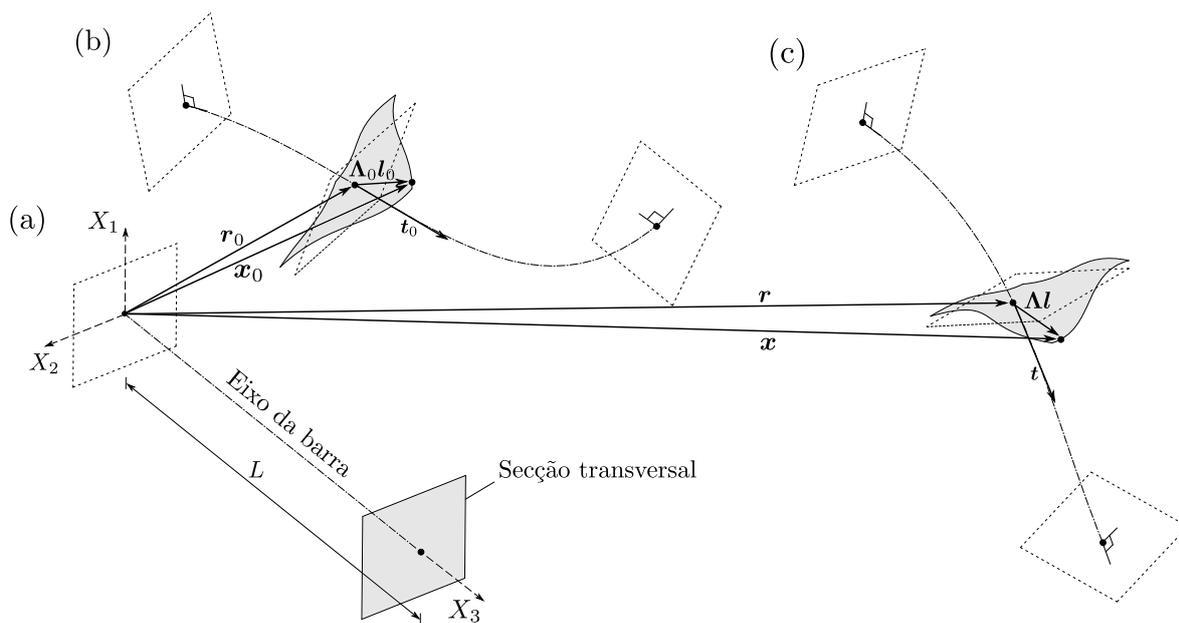


Figura 2.1: Configuração de (a) referência, (b) inicial e (c) atual de uma barra.

O vetor  $l$  é dado por

$$l = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + \omega(X_1, X_2) p(X_3) \mathbf{E}_3, \quad (2.3)$$

onde  $\omega$  é a função de empenamento (*warping* na terminologia em língua inglesa) para a torção e  $p$  a sua amplitude ao longo do eixo. Esta descrição é essencialmente idêntica à utilizada por Simo e Vu-Quoc (1991), muito embora estes autores não tenham imposto a hipótese de  $\mathbf{\Lambda}$  tornar a secção perpendicular ao eixo. De facto, de acordo com esta hipótese cinemática de base, admite-se que as secções transversais, a menos do empenamento associado à torção, permanecem perpendiculares ao eixo da peça após deformação (em todas as configurações). Desta forma, o tensor de rotação  $\mathbf{\Lambda}$  não é completamente independente da configuração do eixo da barra. Em particular, conforme se verá na Secção 2.5, este tensor é obtido a partir do versor da tangente ao eixo

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} \quad (2.4)$$

e da rotação de torção ao longo do eixo da barra. Deve referir-se ainda que os tensores de rotação constituem transformações ortogonais próprias, as quais satisfazem

$$\mathbf{\Lambda}^t = \mathbf{\Lambda}^{-1}, \quad (2.5)$$

$$\det(\mathbf{\Lambda}) = 1. \quad (2.6)$$

A configuração inicial constitui um caso particular da configuração atual. As expressões (2.2) e (2.3) são assim aplicáveis, embora se utilize o índice  $(\cdot)_0$  para designar esta configuração, ou seja,

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{r}_0 + \mathbf{\Lambda}_0 \mathbf{l}_0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{l}_0 = X_1 \mathbf{E}_1 + X_2 \mathbf{E}_2 + \omega p_0 \mathbf{E}_3. \quad (2.8)$$

## 2.3 Deformação

Para caracterizar a deformação da barra começa-se por obter a expressão do gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  entre as configurações de referência e atual, a qual é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j \\ &= \mathbf{x}_{,1} \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{x}_{,2} \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{x}' \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= \mathbf{\Lambda} (\mathbf{E}_1 + \omega_{,1p} \mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{\Lambda} (\mathbf{E}_2 + \omega_{,2p} \mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_2 \\ &\quad + (\mathbf{r}' + \mathbf{\Lambda}' \mathbf{l} + \mathbf{\Lambda} \omega p' \mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_3.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Para obter expressões com maior significado físico, é conveniente colocar em evidência a rotação da secção. No presente caso tem-se

$$\mathbf{F} = \mathbf{\Lambda} (\mathbf{g}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{g}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{g}_3 \otimes \mathbf{E}_3),\tag{2.10}$$

em que os vetores  $\mathbf{g}_i$  caracterizam a deformação de fibras orientadas segundo  $X_i$  na configuração de referência, deduzindo o efeito da rotação da secção, e são dados por

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{E}_1 + \omega_{,1p} \mathbf{E}_3,\tag{2.11}$$

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{E}_2 + \omega_{,2p} \mathbf{E}_3,\tag{2.12}$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{\Gamma} + \mathbf{E}_3 + \mathbf{K} \times \mathbf{l} + \omega p' \mathbf{E}_3,\tag{2.13}$$

onde se utilizaram as medidas de deformação propostas por Simo (1985)

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{r}' - \mathbf{E}_3,\tag{2.14}$$

$$\mathbf{K} = \text{axi} (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}'),\tag{2.15}$$

e que caracterizam a extensão/distorção e a curvatura de flexão/torção<sup>1</sup>, respetivamente. Utilizando (2.4) e a hipótese de  $\mathbf{\Lambda}$  tornar a secção perpendicular ao eixo, ou seja,  $\mathbf{t} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_3$ , é-se conduzido a

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{r}' - \mathbf{E}_3 = \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{t} \|\mathbf{r}'\| - \mathbf{E}_3 = (\|\mathbf{r}'\| - 1) \mathbf{E}_3,\tag{2.16}$$

o que mostra que  $\mathbf{\Gamma}$  apenas possui uma componente não-nula.

Neste trabalho, caracteriza-se a deformação através do tensor habitualmente utilizado nas formulações de vigas curvas baseadas na teoria de Simo (1985) (ver, por exemplo, a tese de Ritto Corrêa, 2004)

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{F} - \mathbf{\Lambda}_0^t \mathbf{F}_0 \\ &= (\mathbf{g}_1 - (\mathbf{g}_1)_0) \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{g}_2 - (\mathbf{g}_2)_0) \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{g}_3 - (\mathbf{g}_3)_0) \otimes \mathbf{E}_3.\end{aligned}\tag{2.17}$$

<sup>1</sup>Note-se que  $\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}'$  é um tensor anti-simétrico, dado que

$$\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}' + (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}')^t = \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda}' + (\mathbf{\Lambda}^t)' \mathbf{\Lambda} = (\mathbf{\Lambda}^t \mathbf{\Lambda})' = \mathbf{0}.$$

Assim, este tensor pode ser representado por  $\widetilde{\mathbf{K}}$  e tem-se  $\widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{l} = \mathbf{K} \times \mathbf{l}$ . Note-se ainda que, como se elimina a rotação da secção, as componentes  $K_1$  e  $K_2$  são curvaturas de flexão e a componente  $K_3$  é a curvatura de torção.

Naturalmente, este tensor não é idêntico ao tensor de deformação de Green-Lagrange e, como se discutirá na Secção 3.2.1, a sua escolha acarreta algumas consequências ao nível da modelação constitutiva. Tendo em conta as expressões obtidas anteriormente, as componentes não-nulas do tensor de deformação são dadas por

$$H_{31} = \omega_{,1}(p - p_0), \quad (2.18)$$

$$H_{32} = \omega_{,2}(p - p_0), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} H_{i3} &= (\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Gamma}_0 + \mathbf{K} \times \mathbf{l} - \mathbf{K}_0 \times \mathbf{l}_0 + \omega(p' - p'_0)\mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_3 \\ &= (\|\mathbf{r}'\| - \|\mathbf{r}'_0\| + \omega(p' - p'_0))\mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3 + ((\mathbf{K} - \mathbf{K}_0) \times (X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2)) \otimes \mathbf{E}_3 \\ &\quad + \omega \underline{((p\mathbf{K} - p_0\mathbf{K}_0) \times \mathbf{E}_3)} \otimes \mathbf{E}_3, \end{aligned} \quad (2.20)$$

com  $i = 1, 2, 3$ . O termo sublinhado na expressão (2.20) corresponde a um acoplamento não-linear entre o empenamento e a curvatura, o qual pode ser desprezado admitindo a hipótese das pequenas deformações. Acresce referir que a falta de simetria do tensor de deformação é ultrapassada considerando a sua parte simétrica, tal como proposto por Simo e Vu-Quoc (1991). Deste modo, surgem três componentes de deformação independentes, dadas por

$$\epsilon = H_{33} = \hat{\Gamma} + \omega\hat{p}' + \hat{K}_1X_2 - \hat{K}_2X_1, \quad (2.21)$$

$$\gamma_{13} = (H_{13} + H_{31}) = -\hat{K}_3X_2 + \omega_{,1}\hat{p}, \quad (2.22)$$

$$\gamma_{23} = (H_{23} + H_{32}) = \hat{K}_3X_1 + \omega_{,2}\hat{p}, \quad (2.23)$$

onde  $\epsilon$  caracteriza a extensão longitudinal,  $\gamma_{i3}$  corresponde à distorção entre fibras inicialmente segundo  $X_i$  e  $X_3$ ,  $\Gamma = \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{E}_3$  é o escalar que denota a extensão do eixo da barra e introduziram-se as seguintes grandezas

$$\hat{\Gamma} = \Gamma - \Gamma_0, \quad \hat{p} = p - p_0, \quad \hat{K}_i = K_i - (K_i)_0. \quad (2.24)$$

Ainda em relação às deformações (2.21) – (2.23), note-se que  $\epsilon$  depende da extensão do eixo  $\hat{\Gamma}$ , da variação do peso da função de empenamento e das curvaturas de flexão. Por outro lado, as distorções dependem da curvatura de torção e das derivadas da função de empenamento  $\omega_{,1}$  e  $\omega_{,2}$ .

## 2.4 Equações de equilíbrio

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais, a equação de equilíbrio é dada por

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0, \quad (2.25)$$

onde  $\delta W_{int}$  e  $\delta W_{ext}$  representam o trabalho virtual das forças interiores e exteriores, respetivamente. A equação (2.25) é em geral não-linear, pelo que no presente trabalho se optou por recorrer ao método de Newton-Raphson para a resolver, em virtude da sua robustez e ordem de convergência quadrática. A sua implementação requer que se proceda a uma linearização da equação na “direção” de uma variação incremental/iterativa  $\Delta$  das variáveis relevantes.

Designando por  $\mathbf{u} = \mathbf{r} - X_3\mathbf{E}_3$  o deslocamento do eixo da peça entre a configuração de referência e a configuração atual, tem-se  $\delta\mathbf{u} = \delta\mathbf{r}$  e  $\Delta\delta(\mathbf{u}) = \Delta\delta(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ , tendo em consideração que  $\mathbf{r}$  é uma variável cinemática fundamental, o que será discutido na Secção 2.6. Para além disso, admite-se que o carregamento é constituído por forças pontuais aplicadas no

eixo da peça<sup>1</sup>. Assim, para uma força pontual  $\mathbf{Q}$ , o trabalho virtual das forças exteriores é dado por

$$\delta W_{ext} = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{u} = \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}, \quad (2.26)$$

onde  $\delta \mathbf{r}$  é calculado para  $X_3$  igual à posição do ponto de aplicação a força na configuração de referência. Linearizando a expressão (2.26), resulta

$$\Delta \delta W_{ext} = \Delta \mathbf{Q} \cdot \delta \mathbf{r}. \quad (2.27)$$

Para tirar partido da utilização de uma configuração de referência, o trabalho virtual das forças interiores é escrito nesta configuração. O par conjugado de  $\mathbf{H}$  é o tensor  $\mathbf{P}$ , que para barras retas se relaciona com o primeiro tensor de tensões de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{p}$  através da relação (ver, por exemplo, Ritto Corrêa, 2004)

$$\mathbf{P} = \mathbf{\Lambda}^t \mathbf{p}. \quad (2.28)$$

Assim, tem-se

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \mathbf{H} : \mathbf{P} \, dV, \quad (2.29)$$

em que  $V$  é o volume da barra na configuração de referência. No entanto, tal como na formulação de Simo e Vu-Quoc (1991), como se utilizou a parte simétrica de  $\mathbf{H}$ , o equilíbrio é antes escrito com as medidas de deformação  $\epsilon$  e  $\gamma_{i3}$ , bem como os seus pares conjugados de tensão, que neste trabalho são designados por  $\sigma$  e  $\tau_{i3}$ , respetivamente. Assim, tem-se

$$\delta W_{int} = - \int_V (\delta \epsilon \, \sigma + \delta \gamma_{13} \, \tau_{13} + \delta \gamma_{23} \, \tau_{23}) \, dV. \quad (2.30)$$

Admite-se ainda uma relação elástica linear entre as várias componentes de tensão e deformação, dada por

$$\sigma = E \epsilon, \quad (2.31)$$

$$\tau_{i3} = G \gamma_{i3}, \quad (i = 1, 2) \quad (2.32)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade e  $G$  é o módulo de distorção. Substituindo na expressão (2.30), obtém-se

$$\delta W_{int} = - \int_V (\delta \epsilon \, E \epsilon + \delta \gamma_{13} \, G \gamma_{13} + \delta \gamma_{23} \, G \gamma_{23}) \, dV, \quad (2.33)$$

e a sua linearização é dada por

$$\Delta \delta W_{int} = - \int_V (\Delta \delta \epsilon \, \sigma + \delta \epsilon \, E \Delta \epsilon + \Delta \delta \gamma_{13} \, \tau_{13} + \delta \gamma_{13} \, G \Delta \gamma_{13} + \Delta \delta \gamma_{23} \, \tau_{23} + \delta \gamma_{23} \, G \Delta \gamma_{23}) \, dV. \quad (2.34)$$

Para prosseguir, admite-se que  $X_1$  e  $X_2$  são eixos centrais principais de inércia da secção transversal. Assim, tendo em conta (2.21), a integração na secção da primeira parcela de (2.33) traduz-se em

$$\int_{\Omega} \delta \epsilon E \epsilon \, d\Omega = E \Omega \hat{\Gamma} \delta \Gamma + EI_{\omega} \hat{p}' \delta p' + EI_1 \hat{K}_1 \delta K_1 + EI_2 \hat{K}_2 \delta K_2, \quad (2.35)$$

<sup>1</sup>Conforme se verá no Capítulo 3, existem exemplos em que outros tipos de carregamento são considerados, nomeadamente momentos pontuais (fletor e torsor). Nessas Secções, procede-se à introdução das alterações necessárias para considerar tais carregamentos.

## Capítulo 2. Formulação geometricamente exata para barras esbeltas

---

com as medidas usuais da geometria da secção transversal (inércias centrais principais e constante de empenamento)

$$I_1 = \int_{\Omega} X_2^2 \, d\Omega, \quad (2.36)$$

$$I_2 = \int_{\Omega} X_1^2 \, d\Omega, \quad (2.37)$$

$$I_{\omega} = \int_{\Omega} \omega^2 \, d\Omega. \quad (2.38)$$

Por sua vez, tendo em consideração (2.22) e (2.23), a integração na secção da segunda parcela de (2.33), fornece

$$\int_{\Omega} \delta\gamma_{i3} G \gamma_{i3} \, d\Omega = G \left( I_3 \hat{K}_3 \delta K_3 + I_{3\omega} (\hat{K}_3 \delta p + \hat{p} \delta K_3) + I_{\omega\omega} \hat{p} \delta p \right), \quad (2.39)$$

com as seguintes medidas da geometria da secção

$$I_3 = \int_{\Omega} (X_1^2 + X_2^2) \, d\Omega = I_1 + I_2, \quad (2.40)$$

$$I_{3\omega} = \int_{\Omega} (-\omega_{,1} X_2 + \omega_{,2} X_1) \, d\Omega, \quad (2.41)$$

$$I_{\omega\omega} = \int_{\Omega} (\omega_{,1}^2 + \omega_{,2}^2) \, d\Omega. \quad (2.42)$$

Notando que  $I_3$  não é mais do que o momento polar de inércia da secção, de acordo com a teoria clássica de torção de Saint-Venant (Arantes e Oliveira, 1999), o fator de rigidez à torção  $J$  é dado por

$$J = I_3 + I_{3\omega}. \quad (2.43)$$

Seguidamente, recorre-se ao Teorema de Green para relacionar  $I_{\omega\omega}$  com  $I_3$  e  $J$ , tal como proposto por Simo e Vu-Quoc (1991). Apresentam-se todos os passos até atingir a expressão desejada, uma vez que no trabalho supracitado tal não é efetuado. Em primeiro lugar, recorde-se que, tendo em conta o representado na Figura 2.2, dado um campo vetorial  $\mathbf{V}$  definido no domínio bidimensional  $\Omega$ , de fronteira  $\partial\Omega$ , o Teorema de Green estabelece que

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{V} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (2.44)$$

onde  $[\nabla]^t = [\partial/\partial X_1 \ \partial/\partial X_2]$  é o vetor gradiente,  $\mathbf{n}$  é a normal exterior unitária, referente à curva  $s$  percorrida no sentido anti-horário e que delimita a secção. As equações da teoria de Saint-Venant para a torção fornecem as seguintes relações (Arantes e Oliveira, 1999)

$$\nabla^2 \omega = \omega_{,11} + \omega_{,22} = 0 \quad \text{em } \Omega, \quad (2.45)$$

$$\nabla \omega \cdot \mathbf{n} = -X_1 n_2 + X_2 n_1 \quad \text{em } \partial\Omega, \quad (2.46)$$

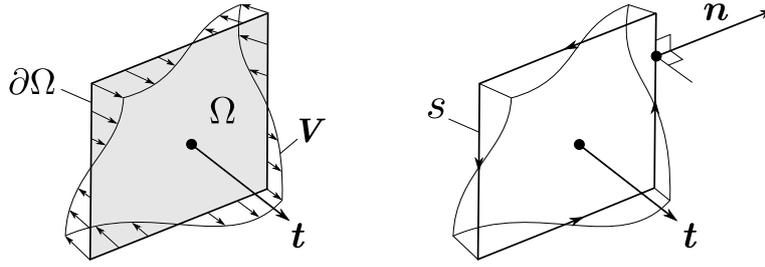


Figura 2.2: Notação para aplicação do Teorema de Green.

onde  $\nabla^2$  é o operador de Laplace. Assim, tomando como ponto de partida a expressão (2.41) e aplicando (2.44), tem-se sucessivamente

$$\begin{aligned}
 I_{3\omega} &= \int_{\Omega} (-\omega X_2)_{,1} + (\omega X_1)_{,2} \, d\Omega \\
 &= \int_{\partial\Omega} \omega (-X_2 \mathbf{E}_1 + X_1 \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{n} \, ds \\
 &= \int_{\partial\Omega} \omega (-X_2 n_1 + X_1 n_2) \, ds \\
 &= - \int_{\partial\Omega} (\omega \nabla \omega) \cdot \mathbf{n} \, ds, \tag{2.47}
 \end{aligned}$$

onde se utilizou (2.46). De seguida, por aplicação de (2.44), no sentido inverso ao anterior, a expressão (2.47) conduz a

$$\begin{aligned}
 I_{3\omega} &= - \int_{\partial\Omega} (\omega \nabla \omega) \cdot \mathbf{n} \, ds \\
 &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\omega \nabla \omega) \, d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} (\nabla \omega \cdot \nabla \omega + \omega \underbrace{\nabla^2 \omega}_{=0}) \, d\Omega \\
 &= - \int_{\Omega} (\omega_{,1}^2 + \omega_{,2}^2) \, d\Omega \\
 &= -I_{\omega\omega}, \tag{2.48}
 \end{aligned}$$

onde se utilizou (2.45) e a definição (2.42). Finalmente, atendendo ao resultado anterior, a equação (2.43) conduz à seguinte identidade

$$I_{\omega\omega} = I_3 - J. \tag{2.49}$$

Com base em (2.35), (2.39) e (2.49), torna-se agora possível escrever a expressão do trabalho virtual das forças interiores na seguinte forma matricial

$$\delta W_{int} = - \int_0^L \begin{bmatrix} \delta\Gamma \\ \delta\mathbf{K} \\ \delta p \\ \delta p' \end{bmatrix}^t \underbrace{\begin{bmatrix} E\Omega & & & & & \\ & EI_1 & & & & \\ & & EI_2 & & & \\ & & & GI_3 & GI_{3\omega} & \\ & & & & GI_{\omega\omega} & \\ \text{Sim.} & & & & & EI_{\omega} \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \hat{p} \\ \hat{p}' \end{bmatrix} \, dX_3, \tag{2.50}$$





onde se tirou partido do facto de axi  $(\Lambda \tilde{\mathbf{a}} \Lambda^t) = \Lambda \mathbf{a}$  e as parcelas  $\mathbf{K}_t$  e  $\mathbf{K}_\varphi$  representam a contribuição de  $\mathbf{t}$  e  $\varphi$ , respetivamente, para a curvatura total.

A curvatura  $\mathbf{K}_\varphi$  possui uma expressão particularmente simples. De facto, a partir de (2.55), a expressão (2.60) permite obter

$$\begin{aligned} [\widetilde{\mathbf{K}}_\varphi] &= [\Lambda_\varphi^t \Lambda'_\varphi] \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varphi' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \varphi' \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$\Rightarrow \widetilde{\mathbf{K}}_\varphi = \varphi' \widetilde{\mathbf{E}}_3, \quad (2.62)$$

e observa-se assim que o escalar  $\varphi'$  representa a curvatura de torção devida a  $\varphi$ .

Atente-se agora à determinação de expressões para a curvatura  $\mathbf{K}_t$ . Neste caso, a expansão pura e simples da expressão (2.59) com base em (2.56) ou (2.57) e nas suas derivadas, conduz a expressões muito extensas e de difícil manipulação. Comece-se então por notar que

$$\mathbf{t} = \Lambda \mathbf{E}_3, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{t}' = \Lambda' \mathbf{E}_3. \quad (2.64)$$

A equação (2.64) pode ser desenvolvida para obter, sucessivamente,

$$\mathbf{t}' = \Lambda \Lambda^t \Lambda' \mathbf{E}_3 = \Lambda \widetilde{\mathbf{K}} \mathbf{E}_3 = \Lambda (\mathbf{K} \times \mathbf{E}_3) = (\Lambda \mathbf{K}) \times (\Lambda \mathbf{E}_3) = (\Lambda \mathbf{K}) \times \mathbf{t}, \quad (2.65)$$

onde a curvatura  $\Lambda \mathbf{K}$  acompanha a secção transversal e é por isso designada de “espacial”. Tendo em conta que  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 0$  por definição ( $\mathbf{t}'$  é perpendicular a  $\mathbf{t}$  ou então  $\mathbf{t}' = \mathbf{0}$ ), é possível inverter o produto externo, obtendo

$$\Lambda \mathbf{K} = \frac{\mathbf{t} \times \mathbf{t}'}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{t}} + \lambda \mathbf{t} = \mathbf{t} \times \mathbf{t}' + \lambda \mathbf{t}, \quad (2.66)$$

para um escalar arbitrário  $\lambda$ , onde se tirou partido do facto de  $\|\mathbf{t}\| = 1$ . Esta forma é particularmente útil para simplificar as expressões, dado que pode ser decomposta em duas parcelas, utilizando o vetor  $\mathbf{t}$  (ver Figura 2.4):

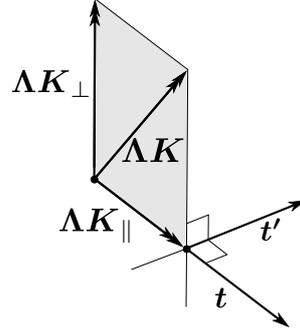
- (i) Uma componente no plano da secção, a qual corresponde à curvatura de flexão. Esta componente designa-se por  $\Lambda \mathbf{K}_\perp$ , por ser perpendicular a  $\mathbf{t}$ , e é dada por

$$\Lambda \mathbf{K}_\perp = \mathbf{t} \times \mathbf{t}'. \quad (2.67)$$

- (ii) Uma componente perpendicular ao plano da secção, que corresponde à curvatura de torção. Esta componente é dada por  $\Lambda \mathbf{K}_\parallel$ , por ser paralela a  $\mathbf{t}$  e, por agora, apenas se sabe que se tem

$$\Lambda \mathbf{K}_\parallel = \lambda \mathbf{t}, \quad (2.68)$$

e que uma das suas parcelas é dada por  $\Lambda \mathbf{K}_\varphi$ , com  $\mathbf{K}_\varphi$  dado pelo vetor axial de (2.62).


 Figura 2.4: Definição das componentes da curvatura espacial para  $\mathbf{t}' \neq \mathbf{0}$ .

A curvatura de flexão no referencial que acompanha a rotação da secção,  $\mathbf{K}_{flex}$ , pode ser agora obtida a partir de  $\mathbf{\Lambda K}_{\perp}$  e da transposta de (2.57), dado que se tem

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{flex} &= \mathbf{\Lambda}^t(\mathbf{\Lambda K}_{\perp}) = \mathbf{\Lambda}^t(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \\ &= \mathbf{t} \times \mathbf{t}' - (\mathbf{t} \cdot (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{t}')) \left( \mathbf{t} - \frac{(\mathbf{E}_3 \times \mathbf{t}) \times \mathbf{t}}{1 + t_3} \right) \\ &= \mathbf{t} \times \mathbf{t}' - \frac{\mathbf{E}_3 \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{t}')}{1 + t_3} (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3). \end{aligned} \quad (2.69)$$

Note-se ainda que, tendo em conta a definição de  $\mathbf{t}$ , dada por (2.4), a sua derivada é

$$\mathbf{t}' = \left( \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} \right)' = \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t})\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|} \quad (2.70)$$

e o termo  $\mathbf{t} \times \mathbf{t}'$  pode ser escrito como

$$\mathbf{t} \times \mathbf{t}' = \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} \times \left( \mathbf{1} - \frac{\mathbf{r}' \otimes \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|^2} \right) \frac{\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^2}, \quad (2.71)$$

uma vez que  $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' = \mathbf{0}$ . Antes de prosseguir, é de salientar que a curvatura de flexão (2.69), apesar de ter sido obtida a partir do tensor de rotação total  $\mathbf{\Lambda}$ , não depende da rotação  $\varphi$ , mas apenas do vetor tangente  $\mathbf{t}$  (como seria de esperar) e, conseqüentemente, constitui a parcela de  $\mathbf{K}_{\mathbf{t}}$  no plano da secção transversal na configuração de referência. Para determinar a parcela em falta, que corresponde a uma curvatura de torção, define-se

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{t}} \mathbf{E}_i, \quad (2.72)$$

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{\Lambda}'_{\mathbf{t}} \mathbf{E}_i, \quad (2.73)$$

com  $i = 1, 2, 3$ . Retomando a expressão (2.59), que se sabe corresponder a uma matriz anti-simétrica  $\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}}$  que se pode exprimir da seguinte forma<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Atendendo às expressões (2.72) e (2.73), tem-se

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}} &= \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{t}}^t \mathbf{\Lambda}'_{\mathbf{t}} = (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{E}_3)^t (\mathbf{e}'_1 \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{e}'_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{e}'_3 \otimes \mathbf{E}_3) \\ &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3) \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_3 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 \\ &\quad + (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3) \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_1 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_2 + (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3) \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3. \end{aligned}$$

$$[\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}}] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & 0 & -\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ -\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Note-se que pelas expressões (2.63) e (2.64) tem-se  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{t}$  e  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{t}'$ , pois  $\Lambda_\varphi$  não influencia o vetor tangente. Tomando partido da definição de vetor axial,

$$[\mathbf{K}_{\mathbf{t}}] = \underbrace{\begin{bmatrix} K_{t1} \\ K_{t2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{flex}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{t3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{tor}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 \end{bmatrix}, \quad (2.75)$$

onde  $\mathbf{K}_{tor}$  é a parcela da curvatura de torção em falta, devida a  $\mathbf{t}$ . Para obter uma expressão para esta curvatura, tendo em conta (2.57) e a propriedade do triplo produto externo entre vetores<sup>1</sup>, começa-se por notar que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= \Lambda_{\mathbf{t}} \mathbf{E}_i \\ &= \mathbf{E}_i + (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{t}) \times \mathbf{E}_i + \frac{\widetilde{\mathbf{E}_3 \times \mathbf{t}}}{1 + t_3} (\mathbf{E}_3 \times \mathbf{t}) \times \mathbf{E}_i \\ &= \mathbf{E}_i - t_i \mathbf{E}_3 - \frac{t_i}{1 + t_3} (\mathbf{t} - t_3 \mathbf{E}_3) \\ &= \mathbf{E}_i - \frac{t_i}{1 + t_3} (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3), \end{aligned} \quad (2.76)$$

com  $i = 1, 2$ . Por conseguinte, a sua derivação em ordem a  $X_3$  é dada por

$$\mathbf{e}'_i = \left( -\frac{t'_i (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3) + t_i \mathbf{t}'}{1 + t_3} + \frac{t_i t'_3}{(1 + t_3)^2} (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3) \right). \quad (2.77)$$

Deste modo, recorrendo às expressões (2.76) e (2.77), é possível escrever a parcela da curvatura de torção como

$$\begin{aligned} K_{t3} &= \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 = (\Lambda_{\mathbf{t}} \mathbf{E}_2) \cdot (\Lambda_{\mathbf{t}} \mathbf{E}_1)' \\ &= \left( \mathbf{E}_2 - \frac{t_2}{1 + t_3} (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3) \right) \cdot \left( -\frac{t'_1 (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3) + t_1 \mathbf{t}'}{1 + t_3} + \frac{t_1 t'_3}{(1 + t_3)^2} (\mathbf{t} + \mathbf{E}_3) \right) \\ &= -\frac{t_2 t'_1 + t'_2 t_1}{1 + t_3} \\ &= -\frac{(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \cdot \mathbf{E}_3}{1 + t_3}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Esta expressão coincide com as obtidas por Boyer e Primault (2004) e Meier et al. (2014) para a curvatura entre duas configurações genéricas, quando se particulariza essa expressão de modo a que a primeira configuração corresponda à configuração de referência do presente trabalho. No entanto, é importante frisar que estes autores não explicam com detalhe como obtiveram essa expressão<sup>2</sup>. O resultado anterior mostra que a rotação  $\Lambda_{\mathbf{t}}$  provoca, em geral,

<sup>1</sup>Para três vetores arbitrários  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  tem-se que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ .

<sup>2</sup>Boyer e Primault (2004) referem apenas que a obtiveram a partir de  $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1$ . Meier et al. (2014) não fornecem qualquer pista para a determinação da expressão.

## 2.6. Equações em termos das variáveis fundamentais

uma curvatura de torção na peça. Face ao exposto, pode finalmente escrever-se  $\mathbf{K}_t$  na seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t &= \mathbf{K}_{flex} + \mathbf{K}_{tor} \\ &= \left( \mathbf{1} - \frac{(\mathbf{t} + 2\mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_3}{1 + t_3} \right) \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^2}.\end{aligned}\quad (2.79)$$

A curvatura de torção total é assim dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{K} \cdot \mathbf{E}_3 &= (\Lambda_\varphi^t \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_\varphi) \cdot \mathbf{E}_3 \\ &= K_{t3} + \varphi' \\ &= -\frac{(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \cdot \mathbf{E}_3}{1 + t_3} + \varphi'.\end{aligned}\quad (2.80)$$

## 2.6 Equações em termos das variáveis fundamentais

Nesta Secção procede-se à escrita das equações necessárias à implementação numérica da formulação desenvolvida, pelo método dos elementos finitos. Escolhe-se para variáveis a interpolar as que estão agrupadas no vetor  $\phi$ , tal que

$$[\phi] = \begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \varphi \\ p \end{bmatrix}, \quad [\phi'] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ \varphi' \\ p' \end{bmatrix}, \quad [\phi''] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'' \\ \varphi'' \\ p'' \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

e por conveniência na escrita das equações, define-se ainda o vetor  $\Phi$  como

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi \\ \phi' \\ \phi'' \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Torna-se assim necessário escrever as equações em termos das variáveis contidas em  $\Phi$ , das suas derivadas e variações (virtuais e incrementais/iterativas). Para o efeito, segue-se a metodologia introduzida por Ritto Corrêa (2004), baseada na construção hierárquica de operadores auxiliares  $\Xi_D$ , para simplificar a escrita das equações, e na utilização de vetores genéricos (no presente caso  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ ) para separar os operadores  $\Xi_D$  das variações das variáveis a interpolar. Contudo, não é demais referir que foi despendido um esforço considerável na determinação e simplificação das expressões que se apresentam de seguida, dado que a sua dedução está longe de ser trivial (ainda que a sua forma final seja relativamente simples, o que é crucial para uma implementação com sucesso). Antes de prosseguir, recorda-se que a segunda variação de uma variável a interpolar é necessariamente nula, ou seja,  $\Delta\delta\Phi = \mathbf{0}$ .

Comece-se então por definir as variações do vetor  $\mathbf{t}$ , as quais são dadas por

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{t} &= \delta\left(\frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|}\right) \\ &= \Xi_{Dt} \delta\mathbf{r}',\end{aligned}\tag{2.83}$$

$$\Xi_{Dt} = \frac{\mathbf{1} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}'\|},\tag{2.84}$$

$$\Delta\delta\mathbf{t} \cdot \mathbf{a} = \Delta\mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) \delta\mathbf{r}',\tag{2.85}$$

$$\begin{aligned}\Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) &= -\frac{(\mathbf{t} \otimes \mathbf{a})\Xi_{Dt} + \Xi_{Dt}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})\Xi_{Dt}}{\|\mathbf{r}'\|} \\ &= -\frac{\mathbf{t} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{t} + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{1} - 3\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})}{\|\mathbf{r}'\|^2},\end{aligned}\tag{2.86}$$

e note-se que tanto  $\Xi_{Dt}$  como  $\Xi_{D^2t}(\mathbf{a})$  são simétricos, uma propriedade que é útil para o desenvolvimento das expressões subsequentes. Com estes resultados, é possível obter as derivadas de  $\mathbf{t}$  em relação a  $X_3$ , sendo estas dadas por

$$\mathbf{t}' = \Xi_{Dt} \mathbf{r}'',\tag{2.87}$$

$$\delta\mathbf{t}' = \Xi_{Dt} \delta\mathbf{r}'' + \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') \delta\mathbf{r}',\tag{2.88}$$

$$\Delta\delta\mathbf{t}' \cdot \mathbf{a} = \Delta\mathbf{r}'' \cdot \Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) \delta\mathbf{r}' + \Delta\mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^2t}(\mathbf{a}) \delta\mathbf{r}'' + \Delta\mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^3t}(\mathbf{r}'', \mathbf{a}) \delta\mathbf{r}',\tag{2.89}$$

com o operador auxiliar

$$\begin{aligned}\Xi_{D^3t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= -\frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{1} - 3\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})}{\|\mathbf{r}'\|^3} \\ &\quad + \frac{3}{\|\mathbf{r}'\|^3} ((\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{t} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{t} \otimes \mathbf{b} + \mathbf{b} \otimes \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{t} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{1} - 5\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})),\end{aligned}\tag{2.90}$$

o qual é simétrico, com argumentos  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  que comutam. Torna-se agora possível simplificar as variações da extensão do eixo da barra, obtendo

$$\Gamma = \|\mathbf{r}'\| - 1,\tag{2.91}$$

$$\delta\Gamma = \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{r}',\tag{2.92}$$

$$\Delta\delta\Gamma = \Delta\mathbf{r}' \cdot \Xi_{Dt} \delta\mathbf{r}'.\tag{2.93}$$

Por outro lado, as variações da rotação de torção  $\varphi$  são dadas por

$$\delta\mathbf{\Lambda}_\varphi = \Xi_{D\varphi} \delta\varphi,\tag{2.94}$$

$$\Xi_{D\varphi} = \cos\varphi \tilde{\mathbf{E}}_3 - \sin\varphi(\mathbf{1} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3),\tag{2.95}$$

$$\Delta\delta\mathbf{\Lambda}_\varphi = \delta\varphi \Xi_{D^2\varphi} \Delta\varphi,\tag{2.96}$$

$$\Xi_{D^2\varphi} = -\sin\varphi \tilde{\mathbf{E}}_3 - \cos\varphi(\mathbf{1} - \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_3),\tag{2.97}$$

e, para a curvatura associada,

$$\delta\mathbf{K}_\varphi = \mathbf{E}_3 \delta\varphi',\tag{2.98}$$

$$\Delta\delta\mathbf{K}_\varphi = \mathbf{0}.\tag{2.99}$$

## 2.6. Equações em termos das variáveis fundamentais

Para a curvatura  $\mathbf{K}_t$ , começa-se por introduzir, por conveniência, o operador

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{1} - \frac{(\mathbf{t} + 2\mathbf{E}_3) \otimes \mathbf{E}_3}{1 + t_3} \right), \quad (2.100)$$

o qual permite escrever

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{A} \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^2}. \quad (2.101)$$

Consequentemente, a variação virtual de  $\mathbf{K}_t$  pode ser escrita como

$$\delta \mathbf{K}_t = \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(1)} \delta \mathbf{r}' + \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(2)} \delta \mathbf{r}'', \quad (2.102)$$

com os operadores auxiliares

$$\begin{aligned} \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(1)} &= \mathbf{A} \left( K_{t3} \Xi_{Dt} - \tilde{\mathbf{t}}' \Xi_{Dt} + \tilde{\mathbf{t}} \Xi_{D^2t}(\mathbf{r}'') \right) \\ &= \mathbf{A} \left( K_{t3} \Xi_{Dt} - \frac{\tilde{\mathbf{r}}'' + 2(\mathbf{t} \times \mathbf{r}'') \otimes \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}'\|^2} \right) \\ &= \mathbf{A} \left( K_{t3} \Xi_{Dt} - \frac{\tilde{\mathbf{r}}''(\mathbf{1} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})}{\|\mathbf{r}'\|^2} \right), \end{aligned} \quad (2.103)$$

$$\Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(2)} = \frac{\mathbf{A}\tilde{\mathbf{t}}}{\|\mathbf{r}'\|}. \quad (2.104)$$

A segunda variação é dada por

$$\Delta \delta \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{a} = \delta \mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(11)}(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}' + \delta \mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(12)}(\mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}'' + \delta \mathbf{r}'' \cdot \left( \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(12)}(\mathbf{a}) \right)^t \Delta \mathbf{r}', \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(11)}(\mathbf{a}) &= -K_{t3} \left[ \Xi_{Dt} (\mathbf{E}_3 \otimes (\mathbf{A}^t \mathbf{a}) + \mathbf{A}^t \mathbf{a} \otimes \mathbf{E}_3) \Xi_{Dt} - \Xi_{D^2t}(\mathbf{A}^t \mathbf{a}) \right] \\ &\quad - \frac{2}{\|\mathbf{r}'\|^2} \left[ (\mathbf{r}'' \times \mathbf{A}^t \mathbf{a}) \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes (\mathbf{r}'' \times \mathbf{A}^t \mathbf{a}) + 2(\mathbf{t} \cdot (\mathbf{r}'' \times \mathbf{A}^t \mathbf{a})) \mathbf{1} \right] \\ &\quad + \frac{\Xi_{Dt} \mathbf{A}^t(\mathbf{a} \otimes \mathbf{E}_3) \tilde{\mathbf{r}}''(\mathbf{1} + 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) - (\mathbf{1} + 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \tilde{\mathbf{r}}'' \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{a} \mathbf{A} \Xi_{Dt}}{\|\mathbf{r}'\|^2(1 + t_3)} \end{aligned} \quad (2.106)$$

$$\Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(12)}(\mathbf{a}) = -\frac{\Xi_{Dt} \mathbf{A}^t(\mathbf{a} \otimes \mathbf{E}_3) \tilde{\mathbf{t}}}{\|\mathbf{r}'\|(1 + t_3)} - (\mathbf{1} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \widetilde{\mathbf{A}^t \mathbf{a}}. \quad (2.107)$$

As variações da curvatura total são portanto definidas como

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{K} &= \delta (\Lambda_\varphi^t \mathbf{K}_t + \mathbf{K}_\varphi) \\ &= \Xi_{D\varphi}^t \mathbf{K}_t \delta \varphi + \Lambda_\varphi^t \delta \mathbf{K}_t + \mathbf{E}_3 \delta \varphi', \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathbf{K} \cdot \mathbf{a} &= \delta \varphi (\mathbf{K}_t \cdot \Xi_{D^2\varphi} \mathbf{a}) \Delta \varphi + \delta \mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(11)}(\Lambda_\varphi \mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}' \\ &\quad + \delta \varphi \mathbf{a} \cdot \left( \Xi_{D\varphi}^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(1)} \right) \Delta \mathbf{r}' + \delta \mathbf{r}' \cdot \left( \Xi_{D\varphi}^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(1)} \right)^t \mathbf{a} \Delta \varphi \\ &\quad + \delta \varphi \mathbf{a} \cdot \left( \Xi_{D\varphi}^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(2)} \right) \Delta \mathbf{r}'' + \delta \mathbf{r}'' \cdot \left( \Xi_{D\varphi}^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(2)} \right)^t \mathbf{a} \Delta \varphi \\ &\quad + \delta \mathbf{r}' \cdot \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(12)}(\Lambda_\varphi \mathbf{a}) \Delta \mathbf{r}'' + \delta \mathbf{r}'' \cdot \left( \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(12)}(\Lambda_\varphi \mathbf{a}) \right)^t \Delta \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Agrupando as expressões anteriores, torna-se possível escrever, sucintamente,

$$\begin{bmatrix} \delta\Gamma \\ \delta\mathbf{K} \\ \delta p \\ \delta p' \end{bmatrix} = \Theta_D \delta\Phi, \quad (2.110)$$

com a matriz auxiliar

$$\Theta_D = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & [t]^t & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \Xi_{D\varphi}^t \mathbf{K}_t & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \Lambda_\varphi^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(1)} & \mathbf{E}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \Lambda_\varphi^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(2)} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

O trabalho virtual das forças interiores (2.50) é então dado por

$$\delta W_{int} = - \int_0^L \delta\Phi^t \Theta_D^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \hat{p} \\ \hat{p}' \end{bmatrix} dX_3. \quad (2.112)$$

Quanto à sua linearização (2.53), é decomposta em duas parcelas, por uma questão de simplificação, sendo a primeira dada por

$$\Delta \delta W_{int}^{(1)} = - \int_0^L \delta\Phi^t \Theta_D^t \mathbf{C} \Theta_D \Delta\Phi dX_3. \quad (2.113)$$

A segunda parcela é relativa à contribuição de  $\Delta\delta\Gamma$  e  $\Delta\delta\mathbf{K}$ . Introduzindo os esforços  $N$  (axial) e  $\mathbf{M}$  (vetor momento), dados por

$$N = E\Omega\hat{\Gamma}, \quad (2.114)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} EI_1 & & \\ & EI_2 & \\ & & GI_3 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}, \quad (2.115)$$

as segundas variações podem escrever-se como

$$\begin{bmatrix} \Delta\delta\Gamma \\ \Delta\delta\mathbf{K} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} N \\ \mathbf{M} \end{bmatrix} = \delta\Phi^t \Theta_{D^2}(N, \mathbf{M}) \Delta\Phi, \quad (2.116)$$

com a matriz auxiliar

$$\begin{aligned} \Theta_{D^2}(N, \mathbf{M}) &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & \mathbf{K}_t \cdot \Xi_{D^2\varphi} \mathbf{M} & 0 & [M]^t \Xi_{D\varphi}^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(1)} & 0 & 0 & [M]^t \Xi_{D\varphi}^t \Xi_{D\mathbf{K}_t}^{(2)} & 0 & 0 \\ & & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ & & & \left( \begin{array}{c} \Xi_{D^2} N + \\ \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(11)} (\Lambda_\varphi \mathbf{M}) \end{array} \right) & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \Xi_{D^2\mathbf{K}_t}^{(12)} (\Lambda_\varphi \mathbf{M}) & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & & & & 0 & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & \mathbf{0}_{1 \times 3} & 0 & 0 \\ & & & & & & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.117)$$

e finalmente obtém-se a segunda parcela de (2.53), ou seja,

$$\Delta \delta W_{int}^{(2)} = - \int_0^L \delta \Phi^t \Theta_{D^2}(N, M) \Delta \Phi \, dX_3. \quad (2.118)$$

Para o trabalho das forças exteriores tem-se, a partir de (2.26),

$$\delta W_{ext} = [Q]^t \Theta_{Dr} \delta \Phi, \quad (2.119)$$

onde  $\delta \Phi$  é calculado para o ponto de aplicação da força e a matriz auxiliar é dada por

$$\Theta_{Dr} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (2.120)$$

Por conclusão, a sua linearização (2.27) é de imediato dada por

$$\Delta \delta W_{ext} = [\Delta Q]^t \Theta_{Dr} \delta \Phi. \quad (2.121)$$

## 2.7 Formulação de um elemento finito

Conforme foi já referido na Secção anterior, as variáveis cinemáticas necessárias e suficientes para descrever a configuração atual de uma barra estão contidas no vetor  $\phi$ . Naturalmente, a configuração inicial é descrita pelo vetor  $\phi_0$ , tendo em conta a notação utilizada. No presente trabalho, recorre-se a um elemento finito que aproxima diretamente as variáveis cinemáticas contidas nestes vetores. Assim, tendo em conta que entre as configurações de referência e inicial se tem

$$[\phi_0] - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (r_1)_0 \\ (r_2)_0 \\ (r_3)_0 - X_3 \\ \varphi_0 \\ p_0 \end{bmatrix}, \quad (2.122)$$

aproxima-se diretamente o vetor do termo do lado direito e portanto a configuração inicial é dada por

$$[\phi_0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [\psi] [\mathbf{d}_0], \quad (2.123)$$

onde a matriz  $\psi$  contém as funções de interpolação e o vetor  $\mathbf{d}_0$  agrupa os graus de liberdade do elemento para a configuração inicial.

Por outro lado, entre as configurações inicial e atual tem-se

$$[\phi] - [\phi_0] = \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{\varphi} \\ \hat{p} \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

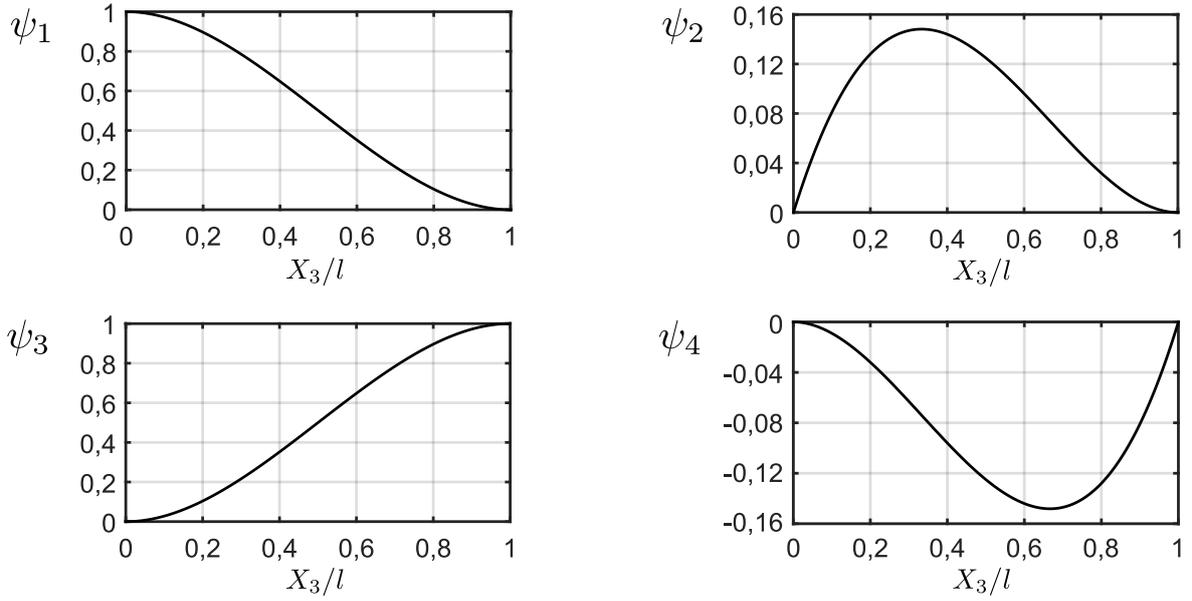


Figura 2.5: Polinômios cúbicos de Hermite.

onde  $(\hat{\cdot}) = (\cdot) - (\cdot)_0$ , conforme foi definido na Seção 2.3, e o termo do lado direito é aproximado de forma análoga a (2.123), o que permite obter a configuração atual através de

$$\begin{aligned}
 [\phi] &= [\phi_0] + [\psi][\hat{\mathbf{d}}] \\
 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + [\psi] \left( [\mathbf{d}_0] + [\hat{\mathbf{d}}] \right), \quad (2.125)
 \end{aligned}$$

onde o vetor  $\hat{\mathbf{d}}$  agrupa os graus de liberdade do elemento entre as configurações inicial e atual, e note-se que se usa o mesmo esquema de interpolação para as configurações inicial e atual.

Tendo em conta que as equações envolvem  $\mathbf{r}''$ , torna-se necessário recorrer a funções de interpolação de classe  $C^1$ . Entre elementos é necessário assegurar a mesma continuidade, caso contrário os vetores  $\mathbf{t}$  são descontínuos entre elementos e, portanto, as secções transversais contíguas não coincidem. Para  $\varphi$  e  $p$  apenas é necessário utilizar funções de classe  $C^0$  mas, por uma questão de simplificação, utilizam-se as mesmas funções. Pelo exposto, utilizam-se para funções de interpolação os polinômios cúbicos de Hermite, os quais são dados por

$$\begin{aligned}
 \psi_1 &= 2 \left( \frac{X_3}{l} \right)^3 - 3 \left( \frac{X_3}{l} \right)^2 + 1, \\
 \psi_2 &= l \left( \left( \frac{X_3}{l} \right)^3 - 2 \left( \frac{X_3}{l} \right)^2 + \frac{X_3}{l} \right), \\
 \psi_3 &= -2 \left( \frac{X_3}{l} \right)^3 + 3 \left( \frac{X_3}{l} \right)^2, \\
 \psi_4 &= l \left( \left( \frac{X_3}{l} \right)^3 - \left( \frac{X_3}{l} \right)^2 \right), \quad (2.126)
 \end{aligned}$$



## Capítulo 2. Formulação geometricamente exata para barras esbeltas

$X_3$ , as variações incrementais/iterativas são imediatamente dadas por

$$\delta\Phi = \Psi\delta\hat{\mathbf{d}}, \quad (2.131)$$

$$\Delta\Phi = \Psi\Delta\hat{\mathbf{d}}, \quad (2.132)$$

$$[\Psi] = \begin{bmatrix} \psi \\ \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

Substituindo (2.131) na expressão (2.112), o trabalho virtual das forças interiores é dado por

$$\delta W_{int} = -\delta\hat{\mathbf{d}}^t \int_0^L \Psi^t \Theta_D^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \hat{p} \\ \hat{p}' \end{bmatrix} dX_3, \quad (2.134)$$

no qual se identifica o vetor das forças interiores  $\mathcal{Q}$ ,

$$\mathcal{Q} = \int_0^L \Psi^t \Theta_D^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{\mathbf{K}} \\ \hat{p} \\ \hat{p}' \end{bmatrix} dX_3. \quad (2.135)$$

O trabalho virtual das forças exteriores é obtido substituindo (2.131) em (2.119), o que conduz a

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= [\mathcal{Q}]^t \Theta_{Dr} \delta\Phi \delta\hat{\mathbf{d}} \\ &= \delta\hat{\mathbf{d}}^t \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (2.136)$$

onde  $\mathcal{F}$  é o vetor das forças exteriores, sendo dado por

$$\mathcal{F} = \Psi^t \Theta_{Dr}^t \mathcal{Q}, \quad (2.137)$$

com  $\Psi$  calculado para o ponto de aplicação da força.

O vetor das forças desequilibradas é assim dado por

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} - \mathcal{Q}. \quad (2.138)$$

A linearização do trabalho virtual das forças interiores (2.53), tomando em conjunto as suas duas parcelas (2.113) e (2.118), conduz a

$$\Delta\delta W_{int} = -\delta\hat{\mathbf{d}}^t \int_0^L \Psi^t (\Theta_D^t \mathbf{C} \Theta_D + \Theta_{D^2}(N, M)) \Psi dX_3 \Delta\hat{\mathbf{d}}, \quad (2.139)$$

onde se identifica a matriz de rigidez tangente  $\mathcal{K}$ ,

$$\mathcal{K} = \int_0^L \Psi^t (\Theta_D^t \mathbf{C} \Theta_D + \Theta_{D^2}(N, M)) \Psi dX_3. \quad (2.140)$$

Finalmente, a linearização do trabalho virtual das forças exteriores (2.136) é dado por

$$\Delta\delta W_{ext} = \delta\hat{\mathbf{d}}^t \Delta\mathcal{F}, \quad (2.141)$$

com o vetor das forças exteriores incrementais,

$$\Delta\mathcal{F} = \Psi^t \Theta_{Dr}^t \Delta\mathcal{Q}. \quad (2.142)$$

## 2.8 Movimento plano

Nesta Secção particulariza-se a formulação para o movimento no plano  $(X_1, X_3)$ , sem torção. Neste caso o vetor  $\phi$  apenas contém  $r_1$  e  $r_3$ , dado que  $r_2 = \varphi = p = 0$  para todas as configurações. Torna-se assim possível simplificar bastante as expressões obtidas na Secção 2.6, as quais se mostrará coincidirem com as da formulação de Gonçalves e Carvalho (2014).

Neste caso particular, a posição de um ponto material na configuração atual é dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{r}(X_3) + \mathbf{\Lambda}(X_3)\mathbf{l}, \quad (2.143)$$

$$\mathbf{l} = X_1\mathbf{E}_1 + X_2\mathbf{E}_2, \quad (2.144)$$

e recorde-se o significado das variáveis intervenientes, explicado na Secção 2.2. A configuração inicial pode ser encarada como se tratasse de um caso particular da configuração atual, distinguindo-se desta pela introdução do índice  $(\cdot)_0$  (muito embora se tenha agora  $\mathbf{l}_0 = \mathbf{l}$ , dado que não ocorre empenamento — recordar (2.3) e (2.144)). A Figura 2.6 ilustra todos os parâmetros relevantes.

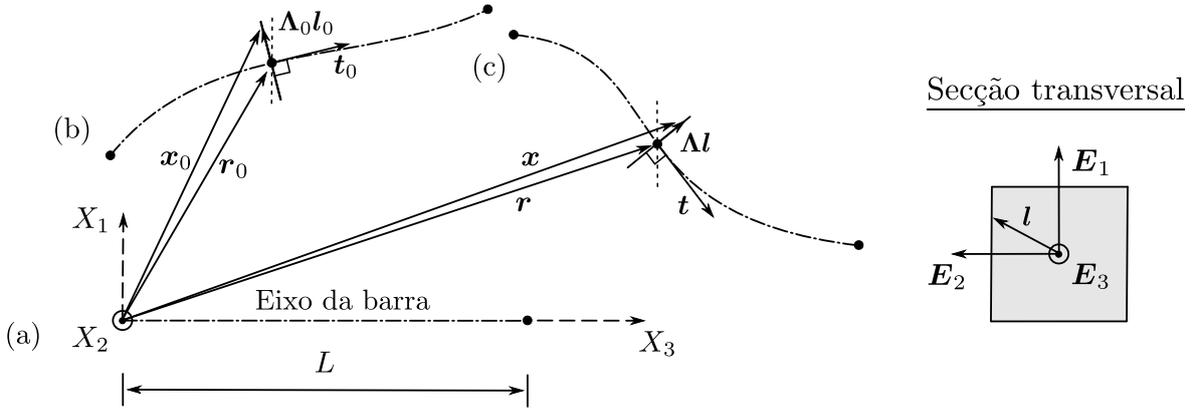


Figura 2.6: Movimento plano: configuração (a) de referência, (b) inicial e (c) atual.

Note-se que, devido ao facto de o movimento estar contido no plano  $(X_1, X_3)$ , o vetor axial de curvatura  $\mathbf{K}$  (ver expressão (2.15)) apresenta uma única componente não-nula, sendo dado por

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

O trabalho virtual das forças interiores (2.50), simplifica-se assim em

$$\delta W_{int} = - \int_0^L \begin{bmatrix} \delta\Gamma \\ \delta K_2 \end{bmatrix}^t \underbrace{\begin{bmatrix} E\Omega \\ EI_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{K}_2 \end{bmatrix} dX_3, \quad (2.146)$$

observando-se que coincide com o da teoria clássica de vigas, ressalvando contudo que tal apenas ocorre devido à relação constitutiva assumida.

A linearização de (2.146) conduz a

$$\Delta\delta W_{int} = - \int_0^L \begin{bmatrix} \delta\Gamma \\ \delta K_2 \end{bmatrix}^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \Delta\Gamma \\ \Delta K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\delta\Gamma \\ \Delta\delta K_2 \end{bmatrix}^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{K}_2 \end{bmatrix} dX_3. \quad (2.147)$$

Encontrando-se o movimento prescrito no plano, o tensor de rotação é dado por

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}) \otimes \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_2 + \mathbf{t} \otimes \mathbf{E}_3, \quad (2.148)$$

onde se utilizou um produto externo para obter a rotação de  $\mathbf{E}_1$ , *i.e.*,

$$\mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}. \quad (2.149)$$

É importante salientar que a expressão (2.148), ao contrário do que se passa com a sua congénere para o caso tridimensional, está isenta de singularidades, o que sem dúvida representa um importante aspeto positivo.

Retomando a expressão (2.75) e utilizando a relação (2.149), a curvatura pode exprimir-se como

$$K_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 = (\mathbf{\Lambda} \mathbf{E}_1) \cdot (\mathbf{\Lambda}' \mathbf{E}_3) = (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}' = \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{t}'), \quad (2.150)$$

onde se tirou partido da propriedade do produto misto entre três vetores<sup>1</sup>. Assim, o trabalho virtual das forças interiores (2.146) é dado por

$$\delta W_{int} = - \int_0^L \begin{bmatrix} \mathbf{r}' \\ \mathbf{r}'' \end{bmatrix}^t \mathbf{\Theta}_D^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{K}_2 \end{bmatrix} dX_3, \quad (2.151)$$

com

$$\mathbf{\Theta}_D = \begin{bmatrix} [\mathbf{t}]^t & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \left[ \frac{(\mathbf{1} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^2} \right]^t & \left[ \frac{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}'\|} \right]^t \end{bmatrix}, \quad (2.152)$$

e a sua linearização (2.147) fica dada por

$$\Delta \delta W_{int} = - \int_0^L \begin{bmatrix} \delta \mathbf{r}' \\ \delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix}^t (\mathbf{\Theta}_D^t \mathbf{C} \mathbf{\Theta}_D + \mathbf{\Theta}_{D^2}(N, M_2)) \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r}' \\ \Delta \mathbf{r}'' \end{bmatrix} dX_3, \quad (2.153)$$

onde

$$\mathbf{\Theta}_{D^2}(N, M_2) = \begin{bmatrix} N \mathbf{\Xi}_{Dt} + 2M_2 \left( \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{r}'' \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \widetilde{\mathbf{E}}_2 \mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}'\|^3} + \frac{K_2(\mathbf{4t} \otimes \mathbf{t} - \mathbf{1})}{\|\mathbf{r}'\|^2} \right) & \frac{-M_2(\mathbf{1} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \widetilde{\mathbf{E}}_2}{\|\mathbf{r}'\|^2} \\ \text{Sim.} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}. \quad (2.154)$$

Relembra-se que o termo  $N$  (esforço axial) é dado por (2.114) e que  $M_2$  corresponde à segunda componente do vetor momento  $\mathbf{M}$  (ver expressão (2.115)). As expressões obtidas correspondem exatamente às mesmas apresentadas por Gonçalves e Carvalho (2014).

Por fim, no contexto do método dos elementos finitos, utilizando a interpolação com polinómios cúbicos de Hermite, o vetor das forças interiores  $\mathbf{Q}$  e a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  são de imediato dados por

$$\mathbf{Q} = \int_0^L \begin{bmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix}^t \mathbf{\Theta}_D^t \mathbf{C} \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \hat{K}_2 \end{bmatrix} dX_3, \quad (2.155)$$

$$\mathbf{K} = \int_0^L \begin{bmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix}^t (\mathbf{\Theta}_D^t \mathbf{C} \mathbf{\Theta}_D + \mathbf{\Theta}_{D^2}(N, M_2)) \begin{bmatrix} \psi' \\ \psi'' \end{bmatrix} dX_3. \quad (2.156)$$

O trabalho virtual das forças exteriores e sua linearização não apresentam qualquer alteração ao disposto na Secção 2.7, sucedendo-se o mesmo com o vetor das forças desequilibradas.

<sup>1</sup>Para três vetores arbitrários  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$  tem-se que  $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ .

## 2.9 Implementação computacional

Procede-se à implementação numérica do elemento finito proposto na Secção 2.7, utilizando para o efeito o programa MATLAB (The Mathworks, 2014). O facto de tratar-se de uma linguagem de programação interpretada<sup>1</sup> traduz-se numa menor velocidade de cálculo relativamente a linguagens compiladas (*e.g.*, PASCAL, FORTRAN, C++, etc) tipicamente utilizadas no contexto da implementação do método dos elementos finitos. No entanto, a preferência pelo MATLAB deveu-se a possuir uma vasta biblioteca de funcionalidades, a qual permite uma implementação rápida e eficiente. Nomeadamente, a biblioteca de operações matriciais permite a implementação das expressões desenvolvidas na Secção 2.7 de forma concisa, clarificando o código.

A necessidade de recurso a expressões que envolvem variáveis simbólicas resulta num tempo de cálculo substancialmente superior. Porém, a *symbolic math toolbox*, que se encontra incorporada no MATLAB, permite uma redução no que se refere ao tempo despendido no cálculo. A linguagem de programação que lhe está subjacente é MuPAD, a qual apresenta algumas diferenças em relação à MATLAB. Ressalva-se no entanto que apenas as rotinas envolvendo a necessidade supracitada se encontram escritas nesta linguagem.

O programa desenvolvido é constituído pelas seguintes rotinas, as quais são apresentadas nos Anexos A e B:

- (i) Rotina de controle, a qual aplica incrementalmente o carregamento, avaliando o equilíbrio do sistema. Caso o equilíbrio não se verifique (com uma certa tolerância), a rotina procede iterativamente até que tal ocorra, de acordo com o Método de Newton-Raphson;
- (ii) Determinação da matriz de rigidez tangente e do vetor das forças desequilibradas;
- (iii) Representação gráfica de resultados.

Nas Secções seguintes descrevem-se sucintamente estas rotinas.

### 2.9.1 Rotina de controle

A rotina de controle permite obter trajetórias de equilíbrio não-lineares. O controle é realizado em termos de carga ou, em opção, em termos de deslocamento. A alteração entre os dois tipos de controle pode ser efetuada em qualquer ponto da trajetória de equilíbrio.

No caso do controle de carga, o utilizador deve definir os incrementos (de carga) a aplicar de forma sucessiva. Conforme foi já referido, em cada incremento procede-se à resolução do sistema de equações não-lineares (*i.e.*, à determinação da configuração de equilíbrio) pelo método de Newton-Raphson. Esta estratégia incremental/iterativa é bastante robusta do ponto de vista numérico e a Figura 2.7 ilustra-a para o caso do incremento inicial de um sistema constituído por um grau de liberdade, para uma maior facilidade de interpretação. Nesta Figura, o índice refere-se ao número da iteração,  $\Delta\mathcal{F}$  é o incremento de carga aplicado (partindo neste caso da origem, logo  $\mathcal{F} = \Delta\mathcal{F}$ ),  $\mathcal{K}$  é a rigidez tangente à trajetória (a qual se encontra representada como positiva<sup>2</sup>),  $d$  é o deslocamento,  $\mathcal{Q}$  é a força interior,  $\mathcal{G} = \mathcal{F} - \mathcal{Q}$  é a força desequilibrada, a qual é utilizada para avaliar a convergência da solução e para obter o incremento de deslocamento subsequente  $\Delta d$ .

<sup>1</sup>É possível no entanto proceder-se à compilação do código. Contudo, o ganho que se obtém não é significativo relativamente à versão não compilada, pelo que esta via não é seguida no presente trabalho.

<sup>2</sup>Em sistemas com múltiplos graus de liberdade, tal condição é equivalente a afirmar que a matriz de rigidez é positiva definida e, conseqüentemente, invertível.

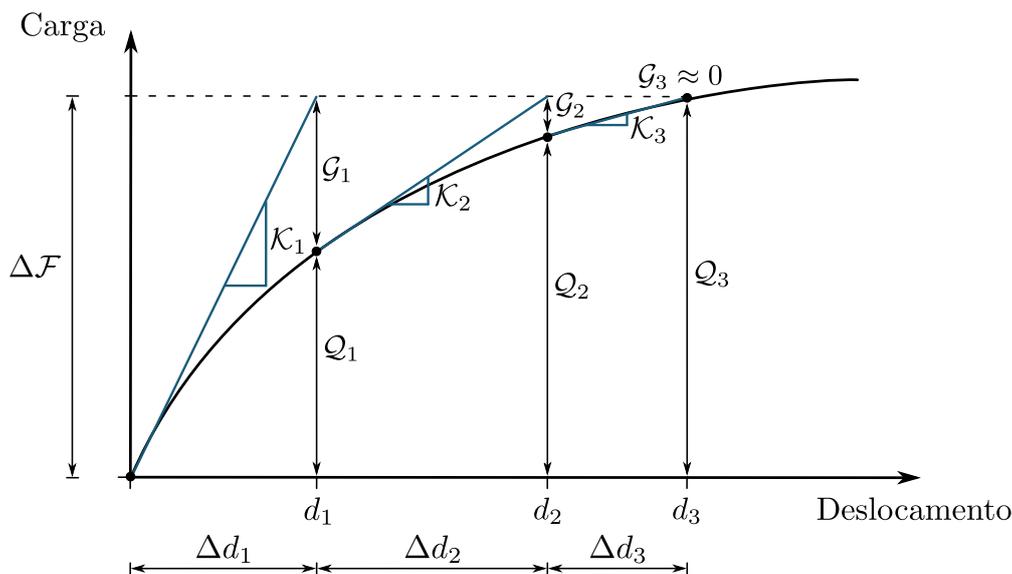


Figura 2.7: Método de Newton-Raphson (sistema com um grau de liberdade).

A generalização para sistemas que envolvam mais do que um grau de liberdade requer a utilização de matrizes e vetores, mas o processo é essencialmente idêntico. Assim, o incremento de deslocamento na iteração  $i$  é dado por<sup>1</sup>

$$\Delta \mathbf{d}_i = \boldsymbol{\kappa}_i^{-1} \mathbf{g}_{i-1}, \quad (2.157)$$

onde  $\mathbf{g} = \Delta \mathcal{F}$  na primeira iteração e o vetor dos deslocamentos é atualizado da seguinte forma

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_{i-1} + \Delta \mathbf{d}_i. \quad (2.158)$$

O processo iterativo decorre até que o critério de convergência estabelecido seja satisfeito com uma determinada tolerância. No presente trabalho adotou-se como critério de convergência

$$\|\mathbf{g}\| < 0,001 \|\mathcal{F}\|, \quad (2.159)$$

o qual, segundo Lourenço (1999), conduz geralmente a soluções bastante aceitáveis. Ressalva-se contudo que é em geral aconselhável realizar um estudo da sensibilidade da solução ao critério de convergência adotado. No presente trabalho, tendo em conta a precisão das soluções obtidas nos exemplos apresentados no Capítulo 3, o critério (2.159) demonstrou ser adequado.

A adoção de um método de incremento de carga tem um sério inconveniente, porque não permite obter soluções na vizinhança de *pontos limite*, ou seja, pontos onde a trajetória evolui sem variação do parâmetro de carga (ou próximo disso). Como esta situação ocorre em alguns exemplos apresentados no Capítulo 3, optou-se por implementar também o método de controle de deslocamento *generalizado*, no sentido em que é constrangido o deslocamento num grau de liberdade escolhido pelo utilizador (Batoz e Dhatt, 1979; ver também Crisfield, 1991). Neste método seleciona-se o deslocamento generalizado  $d_k$  a especificar, tal que

$$d_k = \bar{\mathbf{1}} \mathbf{d}, \quad (2.160)$$

$$[\bar{\mathbf{1}}] = [0 \dots 0 \underbrace{1}_{\text{entrada } k} 0 \dots 0], \quad (2.161)$$

<sup>1</sup>Note-se que não existe diferença entre  $\Delta \mathbf{d}_i$  e  $\Delta \hat{\mathbf{d}}_i$ .

o qual se pretende igualar a um determinado valor objetivo  $\alpha$ . Por forma a introduzir a equação de constrangimento necessária, define-se a grandeza  $a$  dada por

$$a = d_k - \alpha, \quad (2.162)$$

a qual se pretende anular. A sua linearização é de imediato dada por

$$\Delta a = \Delta d_k = \bar{\mathbf{1}} \Delta \mathbf{d}. \quad (2.163)$$

Assume-se que o carregamento aplicado é constituído por forças pontuais dadas pelo produto entre um parâmetro de carga  $\lambda$ , o qual é variável e corresponde a uma incógnita do problema a resolver, e um determinado perfil de carregamento  $\bar{\mathcal{F}}$ , o qual é invariante. O vetor das forças exteriores é deste modo dado por

$$\mathcal{F} = \lambda \bar{\mathcal{F}}, \quad (2.164)$$

cuja linearização é dada por

$$\Delta \mathcal{F} = \Delta \lambda \bar{\mathcal{F}}. \quad (2.165)$$

O vetor das forças interiores (2.135) por sua vez não sofre qualquer alteração. A linearização do vetor da forças desequilibradas (2.138) fornece assim que

$$\Delta \mathcal{G} = \Delta \mathcal{F} - \Delta \mathcal{Q} = \Delta \lambda \bar{\mathcal{F}} - \mathcal{K} \Delta \mathbf{d}. \quad (2.166)$$

As expressões (2.163) e (2.166) fornecem deste modo o processo incremental/iterativo. Assim, tem-se como objetivo na iteração  $i$ ,

$$\mathcal{G}_{i-1} + \Delta \mathcal{G}_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{G}_{i-1} + \Delta \lambda_i \bar{\mathcal{F}} - \mathcal{K}_i \Delta \mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad (2.167)$$

$$a_{i-1} + \Delta a_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{i-1} + \bar{\mathbf{1}} \Delta \mathbf{d}_i = 0. \quad (2.168)$$

Agrupando o sistema de equações proveniente de (2.167) e (2.168), escrito em notação matricial, tendo em vista uma maior facilidade em termos de implementação numérica, tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{K}_i & -\bar{\mathcal{F}} \\ \bar{\mathbf{1}} & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{K}_{ext}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{d}_{ext}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{i-1} \\ -a_{i-1} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}_{ext}} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \mathbf{d}_{ext} = \mathcal{K}_{ext}^{-1} \mathcal{G}_{ext}, \quad (2.169)$$

onde  $\mathcal{K}_{ext}$  é a matriz de rigidez tangente “estendida” (*extended* em língua inglesa),  $\mathcal{G}_{ext}$  e  $\Delta \mathbf{d}_{ext}$  são os vetores das forças desequilibradas e dos deslocamentos, “estendidos”, respetivamente. Note-se que o sistema de equações presente em (2.169) está escrito na mesma estrutura que (2.157), como requerido no contexto do método de Newton-Raphson.

Uma análise preliminar de sensibilidade revelou que o critério de convergência

$$\|\mathcal{G}_{ext}\| < 0,001, \quad (2.170)$$

conduz, no presente trabalho, a resultados precisos, pelo que foi utilizado nas análises efetuadas na Secção 3.4.4.

### 2.9.2 Determinação de matrizes/vetores

A determinação da matriz de rigidez tangente elementar envolve o cálculo de um número apreciável de outras grandezas, estando portanto a eficiência de todo o programa dependente da correta implementação do processo de obtenção das mesmas. Uma vez que o elemento finito proposto é composto por dois nós, com dez graus de liberdade cada, a matriz de rigidez de cada elemento apresenta assim vinte linhas e colunas. Correspondentemente, os vetores das forças interiores, exteriores e desequilibradas, para um elemento, apresentam também vinte linhas. Para uma discretização de uma barra em  $n_e$  elementos finitos, a matriz de rigidez global apresenta assim  $20(n_e + 1)$  linhas e colunas (antes de eliminar os graus de liberdade constringidos cinematicamente), assim como os vetores supracitados (no que diz respeito ao número de linhas).

A introdução das condições de fronteira cinemáticas é efetuada introduzindo equações de constringimento. Nos exemplos presentes no Capítulo 3 consideram-se as seguintes situações:

- (i) *apoio fixo*, que corresponde a eliminar, da matriz de rigidez tangente e dos vetores de forças, os graus de liberdade associados a  $\hat{\mathbf{r}}$  nesse nó (ou seja,  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  no nó). Note-se que os graus de liberdade associados a  $\hat{\mathbf{r}}'$ ,  $\hat{\varphi}$  e  $\hat{p}$  não são constringidos neste apoio.
- (ii) *encastramento*, o qual não permite qualquer translação ou rotação da secção. Esta condição de apoio é modelada mediante as equações  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$ ,  $\hat{\varphi} = 0$  e  $\hat{p} = 0$  para o nó em causa (ou  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ ,  $p = p_0$ ). A primeira equação é idêntica à do apoio fixo. As restantes equações, se  $\mathbf{t}_0$  coincidir com um eixo material como por exemplo  $X_3$ , conduz à eliminação dos graus de liberdade associados a  $\varphi$ ,  $p$ ,  $\hat{r}'_1$  e  $\hat{r}'_2$  no nó (recordar a definição (2.4)). No entanto, se  $\mathbf{t}_0$  não coincidir com um eixo material, a segunda equação não é tão fácil de impor.

Por último, refira-se que o cálculo da matriz de rigidez e do vetor das forças interiores é efetuado com recurso a integração numérica, optando-se no presente trabalho pela regra de quadratura de Gauss. A fim de evitar fenómenos de retenção (detalhes no capítulo seguinte) e à semelhança da formulação de Boyer e Primault (2004), utilizaram-se três pontos de integração ao longo do comprimento do elemento.

### 2.9.3 Representação gráfica de resultados

A extensa biblioteca do MATLAB facilita a construção de uma rotina para a representação gráfica das configurações inicial e atual da barra. A rotina de representação desenvolvida permite a representação tridimensional de uma barra de secção transversal arbitrária, mas constante ao longo do seu comprimento, sendo apenas necessário fornecer as coordenadas dos nós das paredes que compõem a barra, no plano da secção transversal. A função de empenamento é também um dado fornecido pelo utilizador, a qual é utilizada para obter os deslocamentos dos nós de cada secção transversal, tendo em conta a amplitude do empenamento  $p$ .

O processo de visualização das configurações foi desenvolvido com recurso à função *patch* do MATLAB, a qual permite representar polígonos convexos (de 4 nós), fornecendo as entradas *Vertices* e *Faces*. Esta função é particularmente útil, uma vez que segue a metodologia adotada de discretização da secção em paredes. Para uma mais fácil distinção entre configurações, é possível a personalização dos polígonos que as constituem, através das propriedades: (i) *EdgeColor*, que define a cor da linha do contorno, (ii) *FaceColor*, que define a cor da face, e (iii) *FaceAlpha*, que define a opacidade.

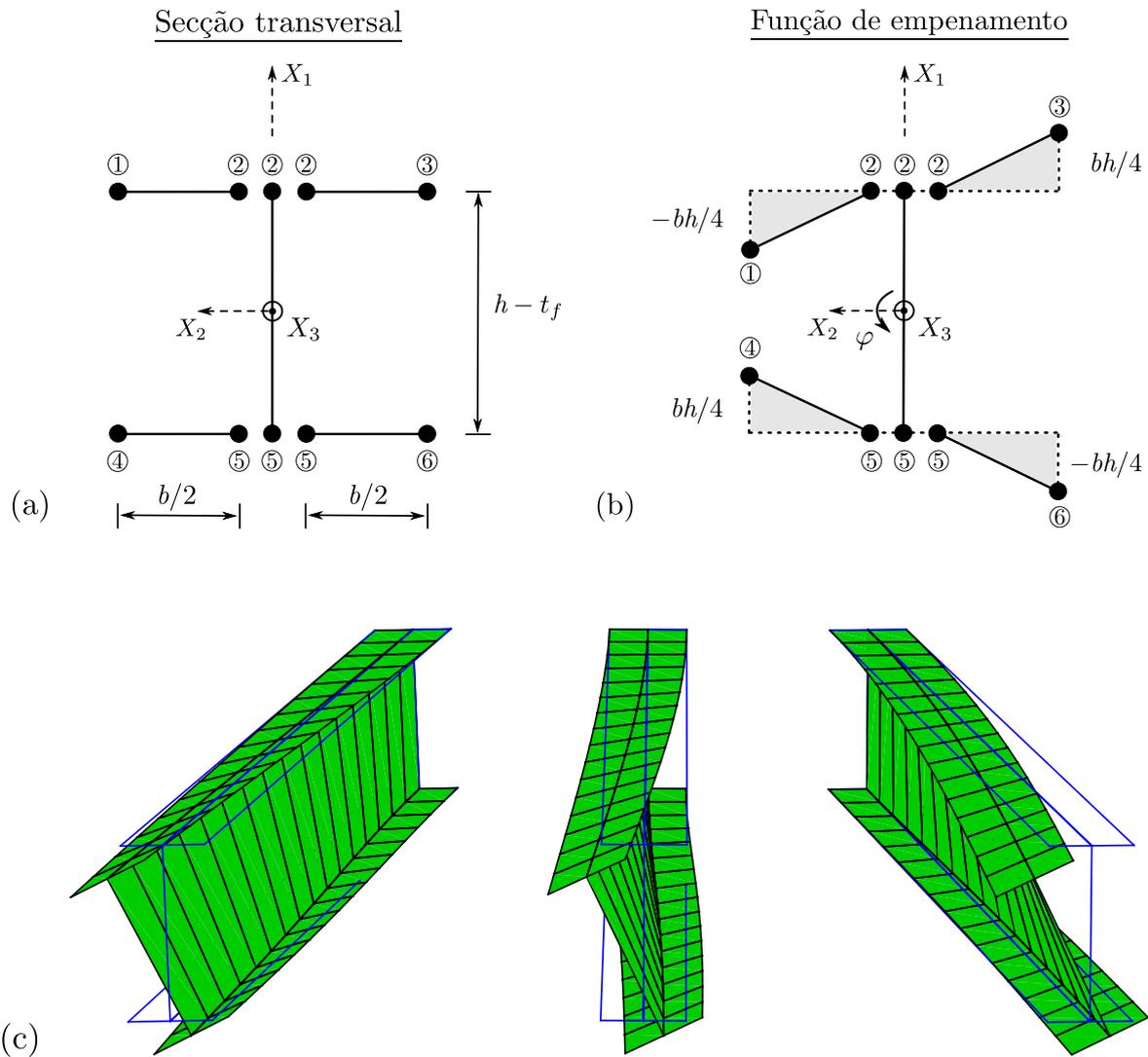


Figura 2.8: Representação gráfica: (a) de coordenadas dos nós, (b) função de empenamento e (c) visualização tridimensional de configurações da barra.

Na Figura 2.8 ilustra-se a aplicação da rotina desenvolvida a um caso particular de uma barra com secção em I, observando-se:

- (a) a secção reduzida à sua linha média, composta pelos nós e paredes necessários e suficientes para a sua definição, com as suas respetivas coordenadas no plano ( $X_1, X_2$ );
- (b) a função de empenamento associada a uma rotação  $\varphi$  positiva e unitária;
- (c) perspetivas da configuração deformada da barra, cuja vista pode ser ajustada em tempo real pelo utilizador.

É ainda de referir que a representação de configurações para problemas bidimensionais cinge-se à visualização do eixo da barra, dado que a orientação da secção encontra-se automaticamente definida, não apresentando qualquer vantagem a sua representação.



## Capítulo 3

# Exemplos de aplicação

### 3.1 Introdução

No presente capítulo apresentam-se alguns exemplos numéricos, por forma a estabelecer a validação e a eficiência do elemento finito proposto. Os resultados obtidos são comparados com soluções analíticas, quando estas existem, com resultados oriundos de outros autores e também com soluções provenientes de modelos de elementos finitos de barra/casca, utilizando o programa de elementos finitos ADINA (Bathe, 2013).

### 3.2 Exemplos relativos a vigas retas em movimento no plano

Nesta Secção apresenta-se uma série de exemplos relativos a vigas retas com movimento no plano. Recorre-se assim à formulação apresentada na Secção 2.8, o que conduz a uma economia em termos de número de graus de liberdade e, conseqüentemente, de esforço computacional despendido. Por outro lado, recorde-se que a descrição cinemática desta formulação é livre de singularidades.

Em todos os casos considera-se a viga em consola representada na Figura 3.1, de comprimento  $L$  e secção transversal circular de diâmetro  $D$ . Admite-se que as configurações de referência e inicial coincidem. O material é caracterizado por um módulo de elasticidade  $E$ . Proceda-se ao estudo de três carregamentos distintos aplicados na extremidade livre: (i) força axial  $F_3$ , (ii) força transversal vertical  $F_1$  e (iii) momento concentrado  $\bar{M}_2$ .

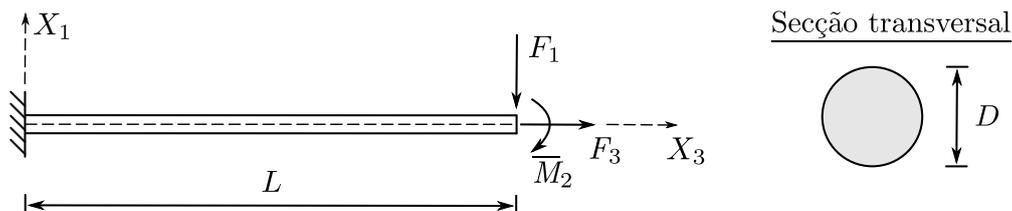


Figura 3.1: Viga reta em consola.

### 3.2.1 Força axial

Primeiramente estuda-se a ação da força axial  $F_3$ . O trabalho virtual das forças exteriores (2.26) é, trivialmente, dado por

$$\delta W_{ext} = F_3 \delta u_3, \quad (3.1)$$

sendo  $u_3$  o deslocamento na extremidade livre da consola. A solução analítica do problema é

$$\mathbf{r} = \left(1 + \frac{u_3}{L}\right) X_3 \mathbf{E}_3, \quad (3.2)$$

pelo que apenas existe uma componente de deformação não-nula, dada por

$$H_{33} = \|\mathbf{r}'\| - \|\mathbf{r}'_0\| = u_3/L, \quad (3.3)$$

onde se teve em conta que  $\mathbf{r}_0 = X_3 \mathbf{E}_3$ . Assim, a partir de (2.30), o trabalho virtual das forças interiores é agora dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_V \delta H_{33} E H_{33} \, dV \\ &= -E\Omega \frac{u_3}{L} \delta u_3, \end{aligned} \quad (3.4)$$

e da equação de equilíbrio (2.25) resulta que

$$F_3 = E\Omega \frac{u_3}{L}, \quad (3.5)$$

onde se observa que a relação é linear em  $u_3$ .

Contudo, escreva-se agora a equação de equilíbrio através do par conjugado  $\mathbf{S} - \mathbf{E}$ , onde  $\mathbf{E}$  é o tensor de deformação de Green-Lagrange e  $\mathbf{S}$  é o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Neste caso resulta também uma única componente de deformação não-nula, com (Crisfield, 1991)

$$E_{33} = \frac{u_3}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_3}{L}\right)^2, \quad (3.6)$$

$$\delta E_{33} = \frac{\delta u_3}{L} \left(1 + \frac{u_3}{L}\right). \quad (3.7)$$

Assumindo uma relação elástica linear entre os dois tensores, o trabalho virtual das forças interiores é agora dado por

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_V \delta E_{33} S_{33} \, dV \\ &= - \int_V \delta E_{33} E E_{33} \, dV \\ &= -E\Omega \left(1 + \frac{u_3}{L}\right) \left(\frac{u_3}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_3}{L}\right)^2\right) \delta u_3, \end{aligned} \quad (3.8)$$

e desta forma a equação de equilíbrio fornece

$$F_3 = E\Omega \left(1 + \frac{u_3}{L}\right) \left(\frac{u_3}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_3}{L}\right)^2\right). \quad (3.9)$$

### 3.2. Exemplos relativos a vigas retas em movimento no plano

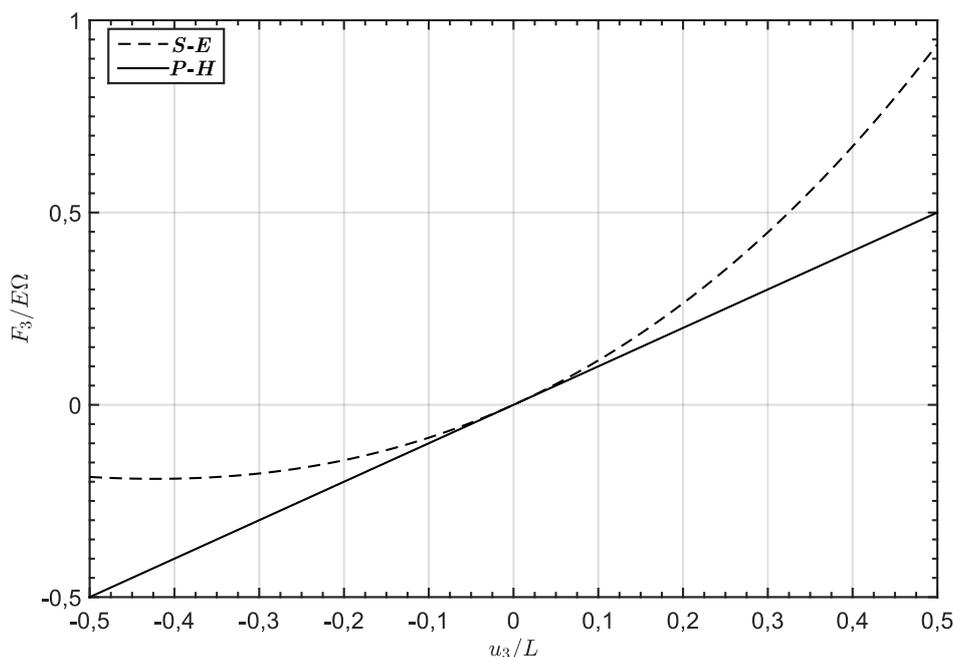


Figura 3.2: Soluções para força axial, obtidas usando os pares  $\mathbf{S}-\mathbf{E}$  e  $\mathbf{P}-\mathbf{H}$ .

Assim, em contraste com o caso anterior, observa-se que a solução é não-linear em  $u_3$ . A Figura 3.2 ilustra as duas soluções e, conforme se pode constatar, as diferenças apenas são significativas para moderadas deformações. Observa-se também que o comportamento à compressão obtido pelo par  $\mathbf{S}-\mathbf{E}$  (e assumindo uma relação constitutiva linear) não é apropriado no âmbito de moderadas deformações, dado que surge um ponto limite (Crisfield,1991). Contudo, no domínio das pequenas deformações, onde se situa uma grande parte dos problemas que surgem no contexto da Engenharia Civil (mesmo que envolvam moderados/grandes deslocamentos), não existem diferenças significativas entre as duas soluções.

Considere-se agora que o comprimento na configuração inicial  $l_0$  não coincide com o comprimento na configuração de referência,  $L$  (e que  $l_0 > L$ ). Neste caso tem-se para a presente formulação

$$\mathbf{r}_0 = \frac{l_0}{L} X_3 \mathbf{E}_3, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{r} = \frac{L + u_3}{L} X_3 \mathbf{E}_3, \quad (3.11)$$

$$H_{33} = \|\mathbf{r}'\| - \|\mathbf{r}'_0\| = \frac{u_3 - (l_0 - L)}{L}, \quad (3.12)$$

o que conduz à solução

$$F_3 = E\Omega \frac{u_3 - (l_0 - L)}{L} = E\Omega \frac{\hat{u}_3}{L}, \quad (3.13)$$

com o deslocamento entre as configurações inicial e atual dado por  $\hat{u}_3 = u_3 - (l_0 - L)$ , em acordo com a notação estabelecida. Observa-se assim que a solução depende linearmente do deslocamento  $\hat{u}_3$ , como seria de esperar, mas é inversamente proporcional ao comprimento da barra na configuração de referência  $L$  e não ao comprimento inicial  $l_0$ .

No presente exemplo, este inconveniente pode ser facilmente ultrapassado através da simples aplicação de um fator corretivo  $L/l_0$  ao módulo de elasticidade do material,  $E$ . Contudo,

para configurações iniciais mais complexas (recorde-se que se utilizam polinómios cúbicos para as descrever), as quais podem ser curvas, o problema é um pouco mais complexo de resolver, remetendo-se essa tarefa para os desenvolvimentos futuros. No entanto, pode mostrar-se que este problema não é significativo sempre que a deformação entre as configurações de referência/inicial for pequena. Assim, nos exemplos que se apresentam de seguida, considera-se sempre um comprimento das barras idêntico nas configurações de referência e inicial. No entanto, a configuração inicial da discretização por elementos finitos será sempre obtida calculando os valores nodais de  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{r}'_0$ , a partir dos quais se estabelece *a posteriori* o vetor  $\mathbf{d}_0$ , significando que, em geral,  $\Gamma_0 \neq 0$  e  $(K_{t3})_0 \neq 0$ .

### 3.2.2 Força transversal vertical

Estuda-se a aplicação isolada de uma força transversal vertical, atuando segundo  $X_1$ , na secção de extremidade livre, com  $E = 209$  GPa,  $L = 10$  m e  $D = 0,01$  m (o que corresponde a uma barra de elevada esbelteza).

O gráfico da Figura 3.3 (a) compara a evolução do deslocamento vertical da extremidade com a força aplicada, obtida com (i) o elemento finito proposto, adotando uma discretização uniforme da viga com 2, 4 e 10 elementos finitos, e (ii) uma discretização uniforme com 50 elementos finitos de barra co-rotacionais de Euler-Bernoulli (ADINA). Este gráfico mostra que a resposta da viga aumenta de rigidez à medida que a força aumenta, o que é explicado pelo facto de o braço da força (em relação ao apoio) diminuir. Observa-se que a solução obtida com 2 elementos finitos geometricamente exatos é bastante semelhante à obtida com o ADINA e, com 4 elementos, é virtualmente coincidente. A Figura 3.3 (b) mostra as configurações deformadas obtidas com a presente formulação (com 4 elementos) e com os elementos co-rotacionais (ADINA), para vários valores da força aplicada. Observa-se uma excelente concordância.

### 3.2.3 Momento concentrado

A aplicação de um momento fletor pontual  $\overline{M}_2$  requer um desenvolvimento adicional relativamente ao que havia sido exposto na Secção 2.8. Tratando-se de um problema no plano ( $X_1, X_3$ ), o único termo da curvatura de flexão que subsiste é  $K_2$ , sendo a variação virtual do trabalho das forças exteriores dada por (Boyer e Primault, 2004)

$$\begin{aligned}\delta W_{ext} &= \overline{M}_2 \mathbf{E}_2 \cdot (\mathbf{t} \times \delta \mathbf{t}) \\ &= \overline{M}_2 \boldsymbol{\Xi}_{DM_2} \cdot \delta \mathbf{r}',\end{aligned}\tag{3.14}$$

onde se introduziu o operador auxiliar

$$\boldsymbol{\Xi}_{DM_2} = \frac{\mathbf{E}_2 \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{r}'\|}.\tag{3.15}$$

A linearização da expressão (3.14) fornece

$$\Delta \delta W_{ext} = \overline{M}_2 \delta \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\Xi}_{D^2M_2} \Delta \mathbf{r}',\tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{D^2M_2} = \frac{\widetilde{\mathbf{E}}_2 (\mathbf{1} - 2\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})}{\|\mathbf{r}'\|^2},\tag{3.17}$$

sendo que o operador  $\boldsymbol{\Xi}_{D^2M_2}$  deve ser incluído na matriz de rigidez tangente.

O caso da ação de um momento concentrado é particularmente interessante para avaliar o efeito do fenómeno de “retenção de membrana”, ao qual o elemento desenvolvido é sensível.

### 3.2. Exemplos relativos a vigas retas em movimento no plano

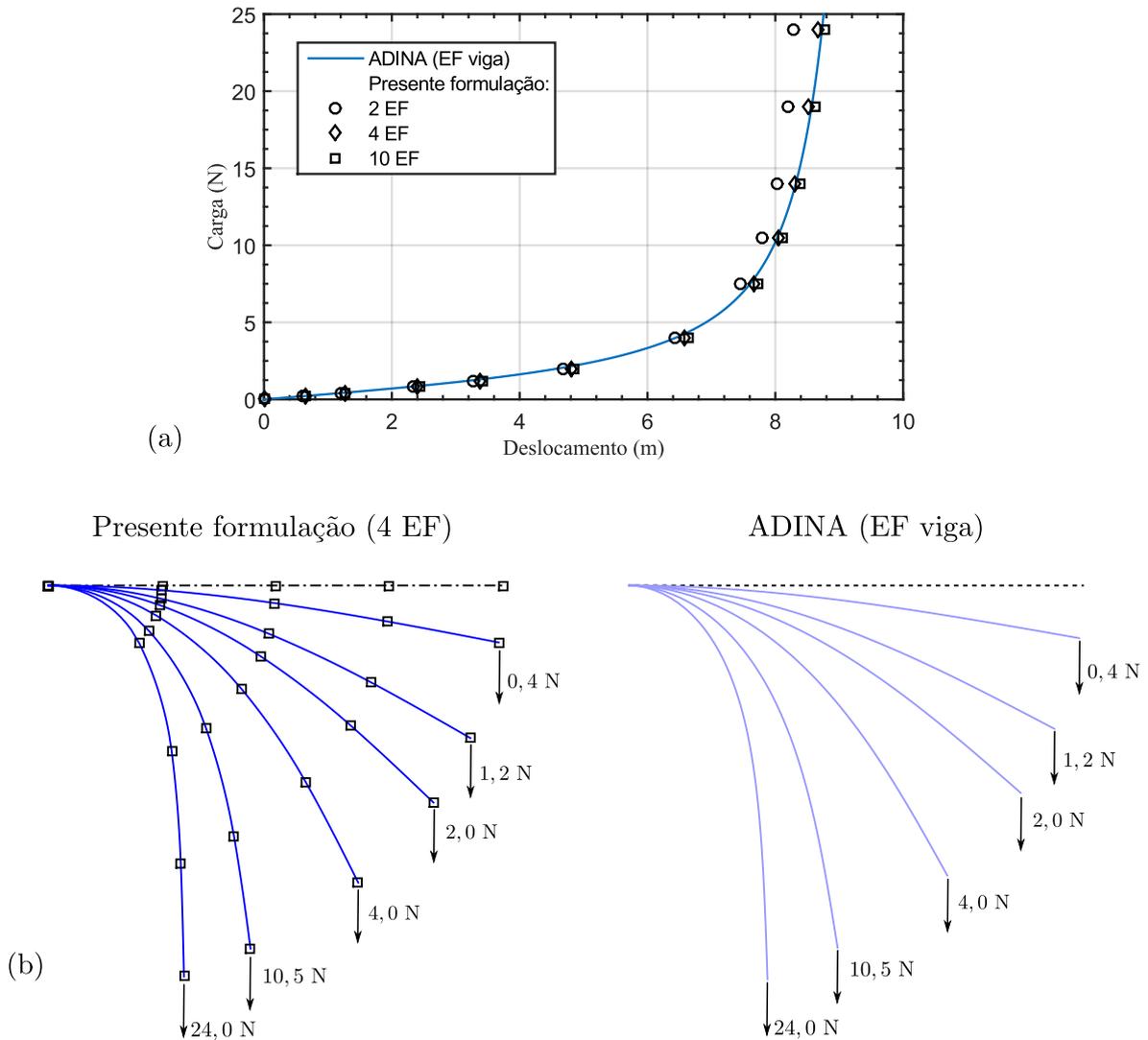


Figura 3.3: Consola com força vertical: (a) Diagrama carga – deslocamento e (b) configurações deformadas.

Este fenómeno, comum em elementos finitos com aproximação de deslocamentos, resulta da incapacidade de reproduzir exatamente a configuração devida à flexão pura (um arco de circunferência não pode ser reproduzido exatamente por polinómios cúbicos de Hermite), surgindo extensão axial ao longo da barra, o que torna a solução mais rígida.

Para avaliar o efeito de retenção de membrana, procede-se ao estudo da influência do parâmetro  $L/D$ , que pode ser encarado como uma medida da esbelteza da viga. A solução analítica para uma configuração deformada com  $n$  circunferências completas de raio  $R$  é, pela lei de Euler-Bernoulli,

$$R = \frac{L}{2n\pi}, \quad K_2 = \frac{1}{R} = \frac{\bar{M}_2}{EI_2} \quad \Rightarrow \quad \bar{M}_2 = \frac{2n\pi EI_2}{L}. \quad (3.18)$$

Considera-se  $E = 209$  GPa,  $L = 10$  m, variando-se o valor de  $D$  de forma a variar o valor de  $L/D$ . Para além disso, utiliza-se um único elemento finito.

Em primeiro lugar efetuam-se análises utilizando 10 pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento e um momento  $\bar{M}_2$  com  $n = 1/4$ , o que corresponde a uma deformada exata na forma de um quarto de circunferência. A Figura 3.4 (a) mostra os resultados obtidos, nomeadamente a extensão axial ao longo do comprimento (normalizado) da viga e a configuração deformada, para cada valor de  $L/D$  considerado. Observa-se que a extensão não é nula para nenhum valor de  $L/D$  (ao contrário do que prevê a solução exata), muito embora diminua à medida que a esbelteza aumenta. As configurações deformadas parecem estar em desacordo com esta conclusão, dado que se aproximam progressivamente da solução exata à medida que a esbelteza diminui. Contudo, para valores de  $L/D$  superiores, embora a extensão diminua, a sua influência na solução resulta superior porque a rigidez axial aumenta em relação à rigidez de flexão (para uma secção circular tem-se  $EA/EI = 16/D^2$ ).

No presente trabalho, os efeitos da retenção de membrana são mitigados recorrendo a uma integração reduzida, com apenas três pontos de Gauss ao longo do comprimento do elemento, tal como na formulação desenvolvida por Boyer e Primault (2004). Assim, recorrendo ao mesmo exemplo, procede-se agora à avaliação da técnica de integração adotada. Conforme se pode observar na Figura 3.4 (b), a integração reduzida permite obter resultados que praticamente não dependem do valor da esbelteza e virtualmente coincidem com a solução exata (com apenas 1 elemento finito). Note-se que, no gráfico da Figura, indica-se a posição dos pontos de integração, mostrando que neles se tem extensão virtualmente nula.

Fixando agora  $L/D = 10$  e adotando a integração reduzida, procede-se ao estudo do comportamento do elemento perante a aplicação de um momento fletor crescente, com  $n = 1, 2, 3$ . Consideram-se ainda discretizações com 2, 4, 10 e 20 elementos de igual comprimento. Os resultados são mostrados na Figura 3.5. O gráfico representa a evolução da distância do ponto de extremidade livre à origem (a qual é nula para a solução exata), em função do momento aplicado (indica-se apenas o respetivo valor de  $n$  no eixo horizontal). Observa-se que, para uma dada discretização, o aumento do carregamento conduz a uma maior diferença para a solução exata, o que se deve ao facto de cada elemento ficar progressivamente sujeito a um maior valor de  $L/R$ . Contudo, a partir de 10 elementos os resultados são bastante satisfatórios, não havendo um ganho significativo em considerar 20 elementos. É de referir que com poucos elementos finitos não é possível obter as configurações para  $n = 2, 3$ .

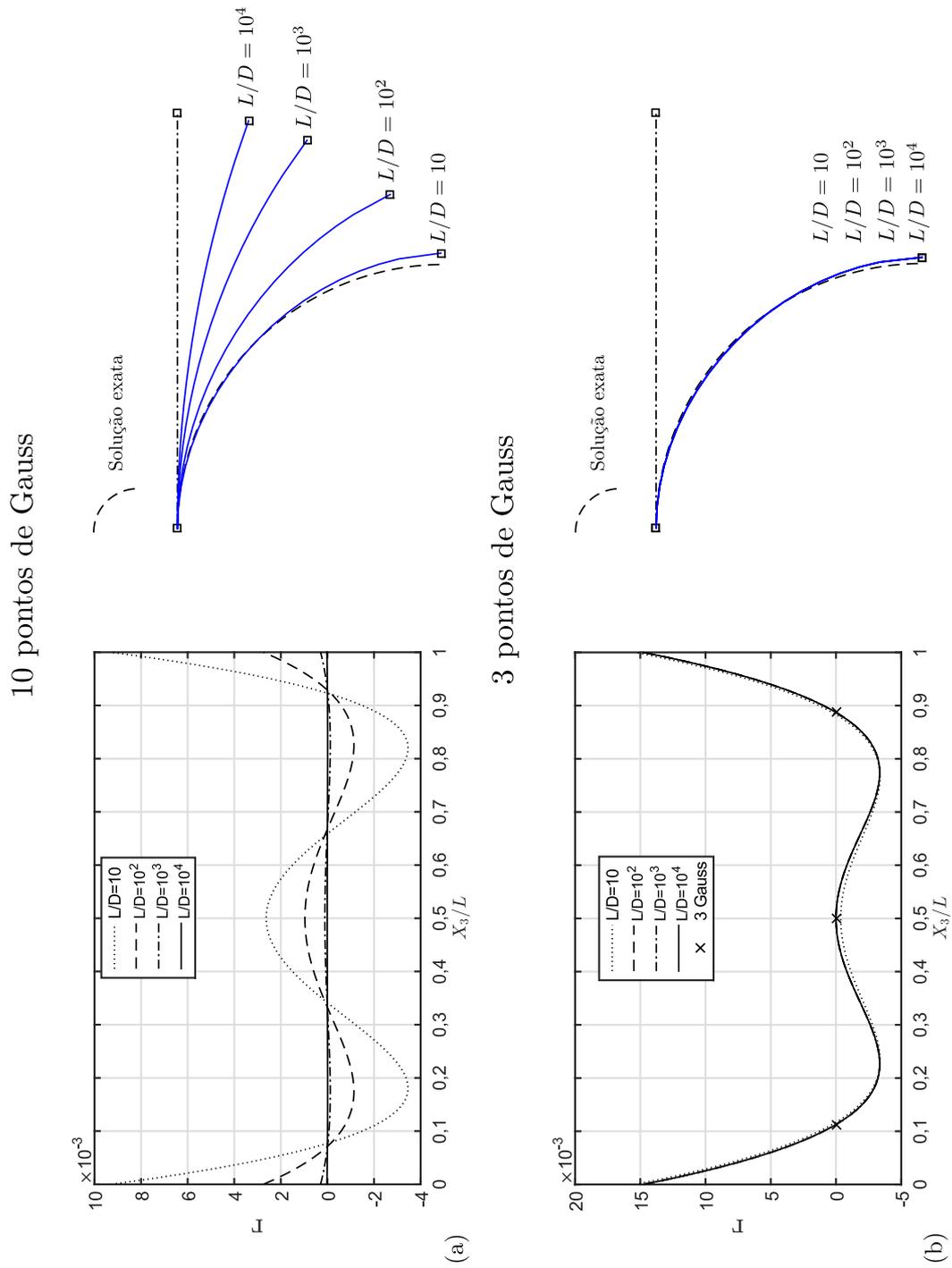
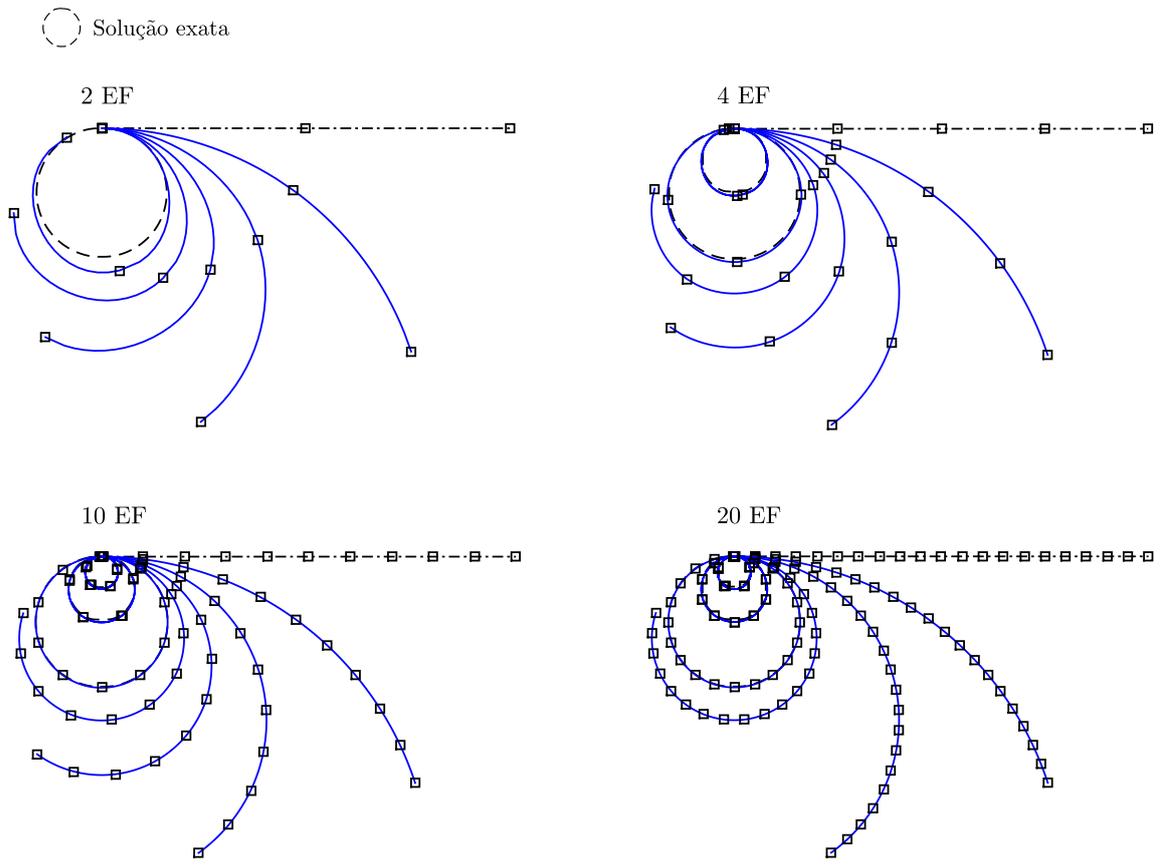
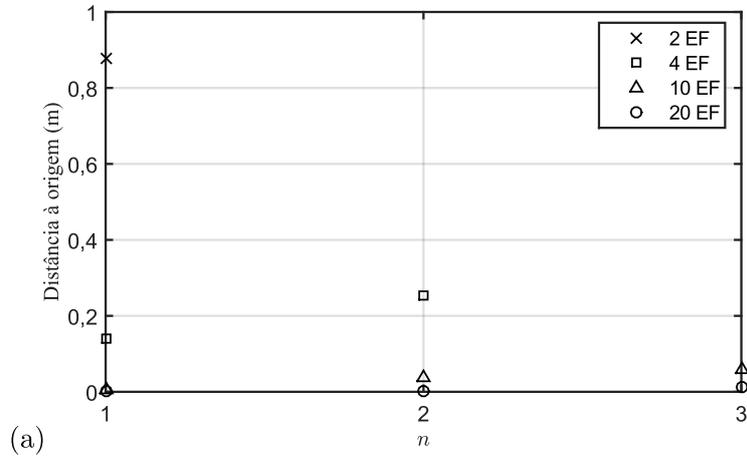


Figura 3.4: Consola com momento concentrado: avaliação do efeito de retenção para (a) integração com 10 pontos de Gauss e (b) integração com 3 pontos de Gauss.



(b)

Figura 3.5: Consola com momento concentrado: (a) distância à origem do ponto da extremidade livre e (b) configurações deformadas.

### 3.3 Exemplos relativos a vigas curvas em movimento plano

Nesta Secção analisam-se dois exemplos com vigas curvas em movimento plano. Em ambos os exemplos a configuração inicial corresponde a um arco de circunferência de raio  $R$ , sendo aproximada de acordo com o que foi estabelecido na Secção 2.7. A partir da Figura 3.6, pode concluir-se que, na configuração inicial,  $\mathbf{r}_0$  é dado em coordenadas polares por

$$[\mathbf{r}_0] = R \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \theta) \\ 0 \\ \text{sen}(\theta_i + \theta) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Estabelece-se que as posições do eixo nas configurações de referência e inicial satisfazem

$$X_3 = \theta R, \quad (3.20)$$

com  $\theta$  em radianos, o que permite garantir que o comprimento inicial da barra,  $l_0$ , é igual ao comprimento na configuração de referência,  $L$ . Assim, a configuração inicial pode escrever-se como

$$[\mathbf{r}_0] = R \begin{bmatrix} \cos(\theta_i + \frac{X_3}{R}) \\ 0 \\ \text{sen}(\theta_i + \frac{X_3}{R}) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

e portanto a deformação axial inicial é dada por

$$\Gamma_0 = \|\mathbf{r}'_0\| - 1 = \left\| \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta_i + \frac{X_3}{R}) \\ 0 \\ \cos(\theta_i + \frac{X_3}{R}) \end{bmatrix} \right\| - 1 = 0. \quad (3.22)$$

Este resultado permite concluir que, neste caso, não é necessário corrigir o módulo de elasticidade, tal como discutido na parte final da Secção 3.2.1. No entanto, tendo em conta que se utilizam polinómios cúbicos para aproximar (3.21) são introduzidos erros, mas que diminuem à medida que o grau de discretização aumenta. Assim, a configuração inicial é obtida calculando apenas os valores nodais de  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{r}'_0$ , a partir de (3.21), os quais são utilizados para estabelecer o vetor  $\mathbf{d}_0$ , de acordo com (2.128).

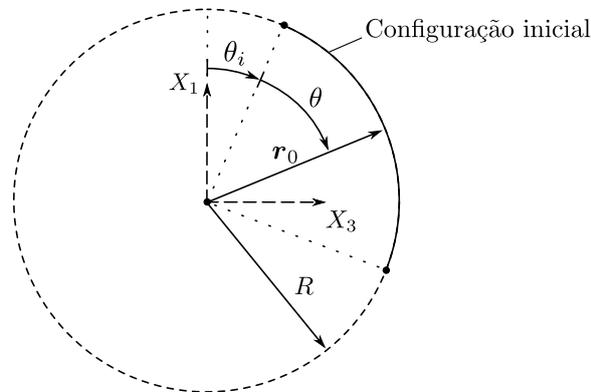


Figura 3.6: Transformação de coordenadas.

### 3.3.1 Viga em consola com carga pontual

O primeiro exemplo corresponde ao representado na Figura 3.7, com  $E = 209$  GPa,  $R = 10$  m e  $D = 0,01$  m. Adota-se uma discretização uniforme, variando o número de elementos finitos de 4 e 10. Para efeitos de comparação, recorre-se a resultados obtidos com uma discretização com 50 elementos finitos de barra co-rotacionais de Euler-Bernoulli (ADINA).

Na Figura 3.8 mostram-se os resultados obtidos, nomeadamente (a) um gráfico carga-deslocamento vertical (segundo  $X_3$ ) da extremidade e (b-c) as configurações deformadas obtidas com os elementos propostos (com 4 elementos) e os elementos co-rotacionais (ADINA). Observa-se uma quase perfeita coincidência entre os resultados obtidos com os dois tipos de elementos, mesmo utilizando apenas 4 elementos finitos propostos.

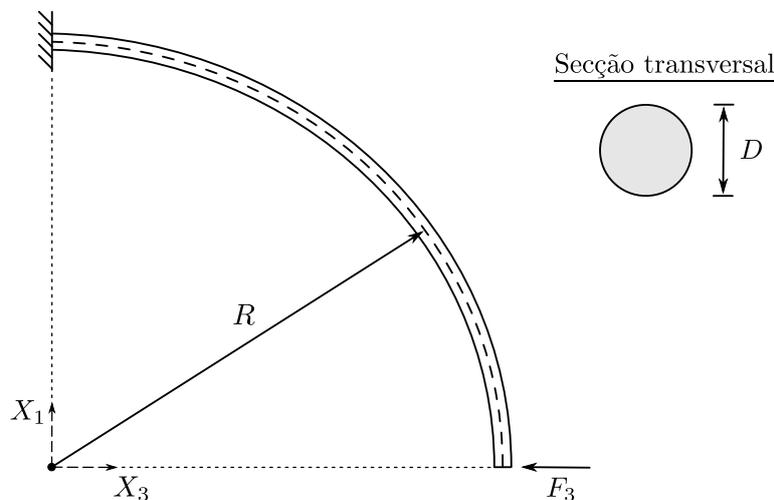


Figura 3.7: Viga curva em consola.

### 3.3.2 Arco de 215°

O segundo exemplo é utilizado frequentemente no contexto da validação de elementos finitos (ver, por exemplo, DaDeppo e Schmidt, 1975; Simo e Vu-Quoc, 1986; Ibrahimbegović, 1995). A geometria e o carregamento do problema são representados na Figura 3.9, sendo os parâmetros relevantes:  $R = 100$  m,  $EA = 10^8$  kN e  $EI = 10^6$  kN/m<sup>2</sup>. Note-se que o arco encontra-se apoiado numa extremidade e encastrado na outra. Na presente formulação, o encastramento foi modelado impondo, simplifcadamente,  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$  e  $\hat{\mathbf{r}}' = \mathbf{0}$  nesse nó, o que é um pouco mais rígido do que considerar  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$  e  $\hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0}$  (recordar Secção 2.9.2).

As trajetórias de equilíbrio para este exemplo são bastante complexas, conforme se pode observar na Figura 3.10 (a). No contexto do presente trabalho, tendo em conta as rotinas implementadas, a determinação das trajetórias de equilíbrio só foi possível utilizando alternadamente controle de carga e deslocamento. No caso do controle de deslocamento, monitorizou-se o deslocamento segundo  $X_1$  do ponto de aplicação da carga ( $u_1$ ). Refira-se que foi necessário alternar o tipo de controle 3 vezes: (i) incremento de carga desde o início do carregamento até ao primeiro ponto limite, (ii) incremento de deslocamento até ao ponto de *snap-back* (onde  $u_1$  diminui), (iii) decremento de carga até ao segundo ponto limite e (iv) incremento de deslocamento até ao último ponto da trajetória. Este gráfico permite comparar os resultados obtidos com o elemento proposto (discretizações com 20 e 30 elementos de

### 3.3. Exemplos relativos a vigas curvas em movimento plano

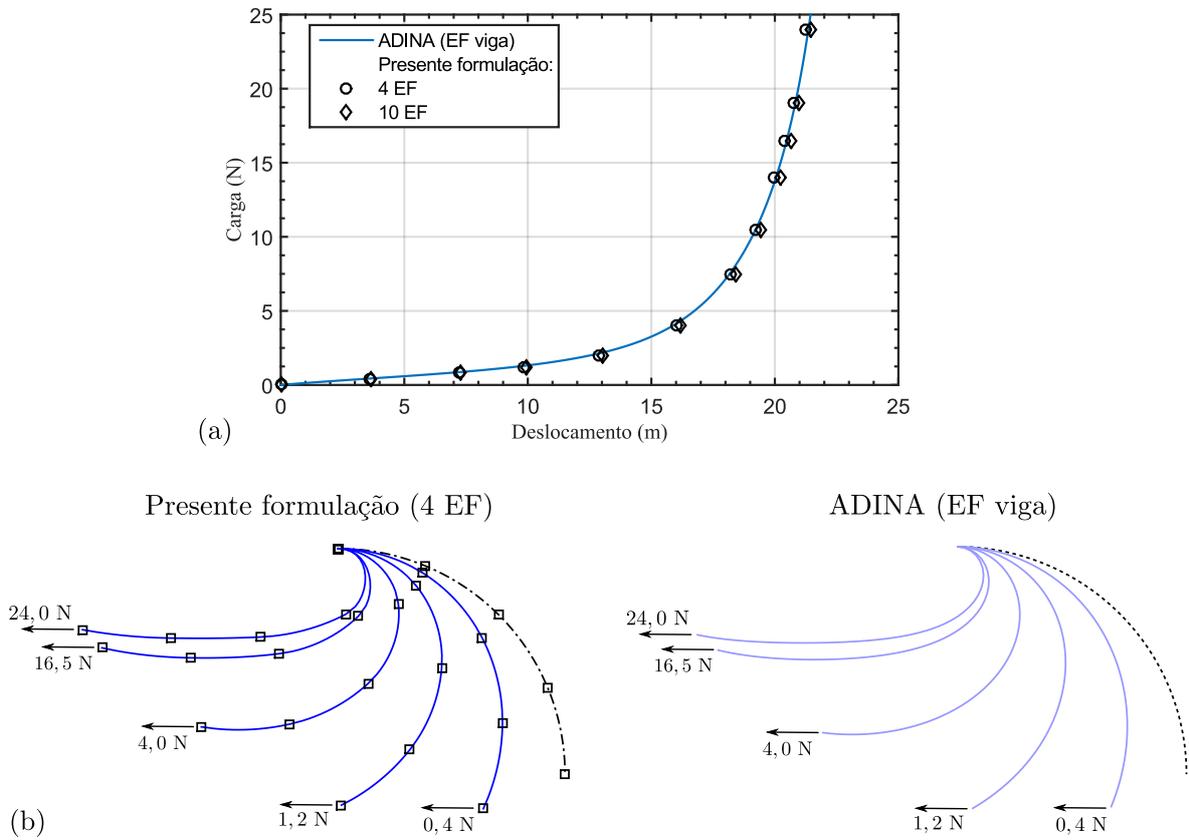


Figura 3.8: Viga curva em consola: (a) diagrama carga – deslocamento e (b) configurações deformadas.

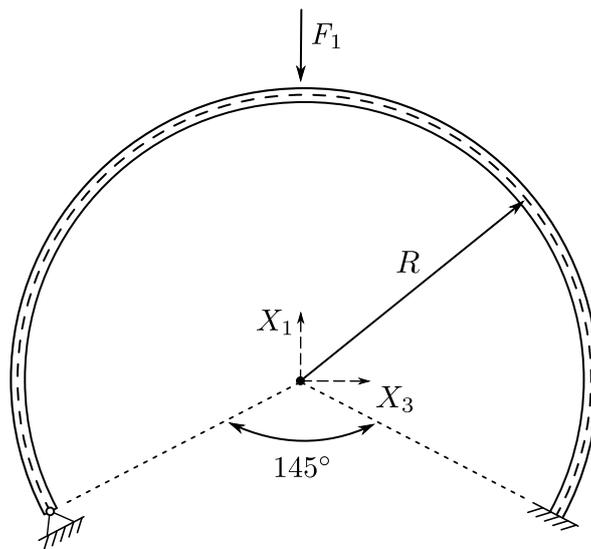


Figura 3.9: Arco de 215°.

Tabela 3.1: Arco de 215°: valor da carga no primeiro ponto limite.

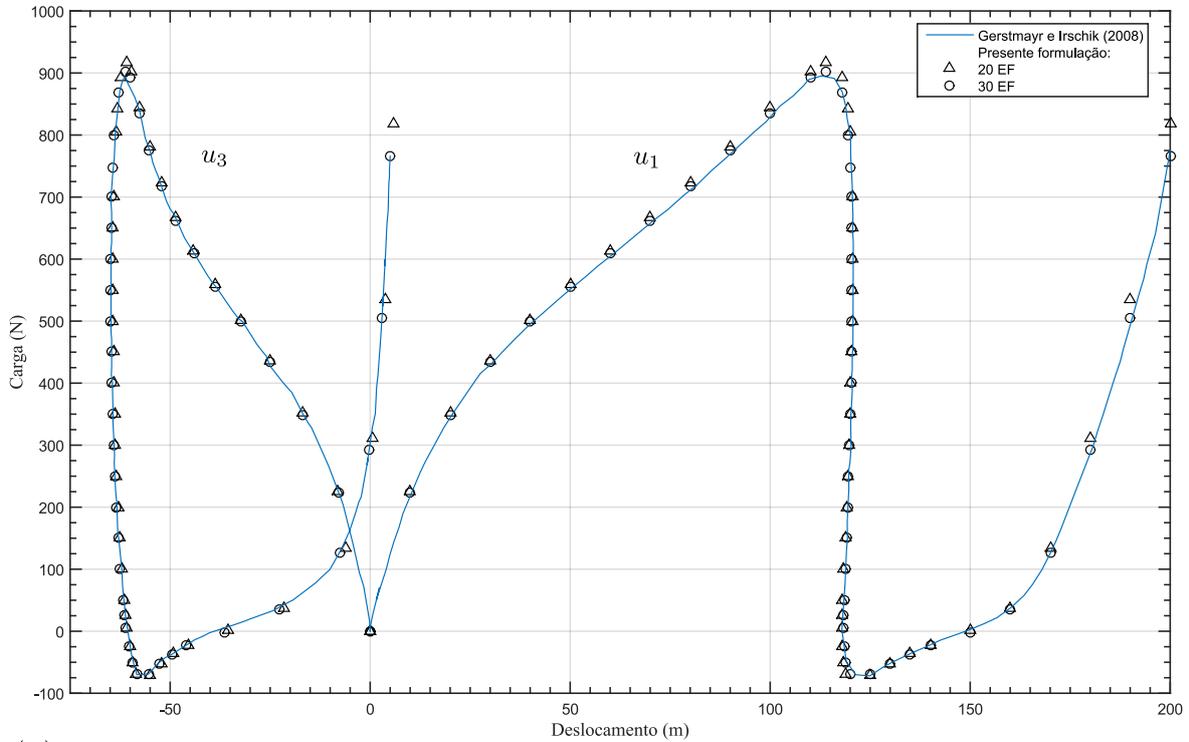
Modelo	Força (N)
Gerstmayr e Irschik (2008), 32 EF	904,570
Gerstmayr e Irschik (2008), 256 EF	897,295
DaDeppo e Schmidt (1975)	897
Simo e Vu-Quoc (1986)	905,28
Ibrahimbegović (1995)	897,3
Presente formulação (30 EF)	902,133

igual comprimento) e os fornecidos por Gerstmayr e Irschik (2008), relativos a 256 elementos de barra de Euler-Bernoulli (semelhantes ao elemento proposto). Observa-se uma excelente concordância, particularmente se forem utilizados 30 elementos finitos propostos.

Na Tabela 3.1 indicam-se os valores da carga no primeiro ponto limite, obtidos por diversos autores, bem como os obtidos com o elemento proposto. Observa-se, mais uma vez, uma boa concordância.

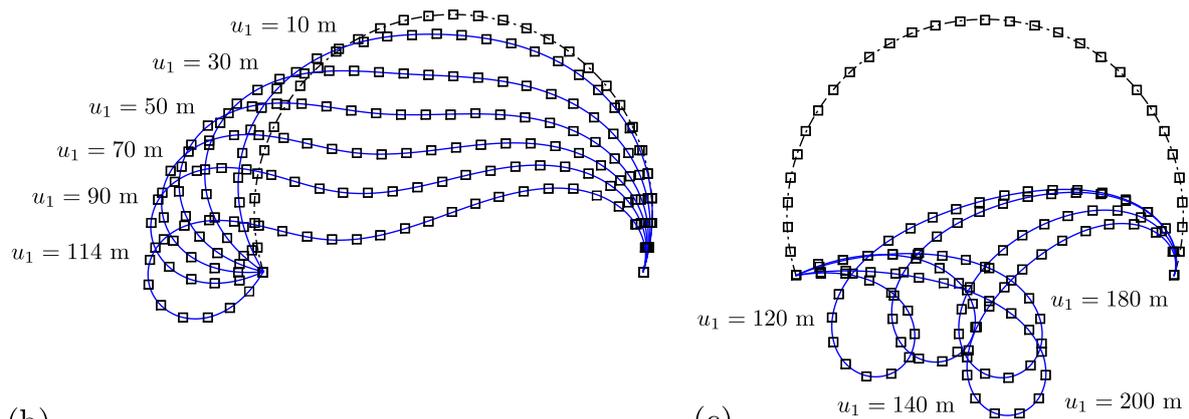
Finalmente, nas Figuras 3.10 (b) e (c), representam-se as configurações deformadas do arco para vários valores da força aplicada, de modo a ilustrar a magnitude dos deslocamentos envolvidos e as potencialidades do elemento proposto.

### 3.3. Exemplos relativos a vigas curvas em movimento plano



(a)

Presente formulação (30 EF)



(b)

(c)

Figura 3.10: Arco de 215°: (a) Trajetórias de equilíbrio e configurações deformadas (b) antes do primeiro ponto limite e (c) após o segundo ponto limite.

### 3.4 Exemplos relativos a vigas retas em movimento no espaço

Nesta Secção consideram-se exemplos em que o movimento envolve deslocamentos no espaço tridimensional. Em particular, consideram-se as barras ilustradas na Figura 3.11, com secção transversal em I e quadrada.

#### 3.4.1 Torção uniforme

Considere-se uma viga de comprimento  $L$ , sujeita à torção pura, induzida por um par de momentos torsores  $\mathbf{T} = T\mathbf{E}_3$ , aplicados nas secções de extremidade. Se o empenamento não é restringido em nenhuma secção, a torção é uniforme e não existe deformação por bi-corte ( $p = K_3$ ). A variação virtual do trabalho das forças exteriores é dada por

$$\delta W_{ext} = \mathbf{T} \cdot \delta\bar{\varphi}\mathbf{E}_3 = T\delta\bar{\varphi}, \quad (3.23)$$

onde  $\bar{\varphi}$  é a rotação relativa entre as duas extremidades da viga. A partir das equações do Capítulo 2, a parcela das forças interiores reduz-se a

$$\delta W_{int} = - \int_0^L \delta\varphi' GJ\varphi' dX_3, \quad (3.24)$$

e a solução é trivial, com  $\varphi' = \bar{\varphi}/L$  e  $\delta\varphi' = \delta\bar{\varphi}/L$  constantes ao longo da barra e

$$\bar{\varphi} = \frac{TL}{GJ}, \quad (3.25)$$

o que coincide com a solução da teoria linear. Note-se ainda que se tem  $p = \varphi' = T/GJ$  em toda a barra.

Para efeitos ilustrativos, analisa-se o caso particular correspondente a  $L = 2$  m e a secção em I da Figura 3.11 (a), com  $G = 80,4$  GPa. A solução analítica ( $\bar{\varphi}$  linear,  $p$  constante) é exatamente obtida com um único elemento finito e, portanto, não se justifica utilizar mais elementos. Contudo, é necessário incluir na formulação o modo de empenamento associado

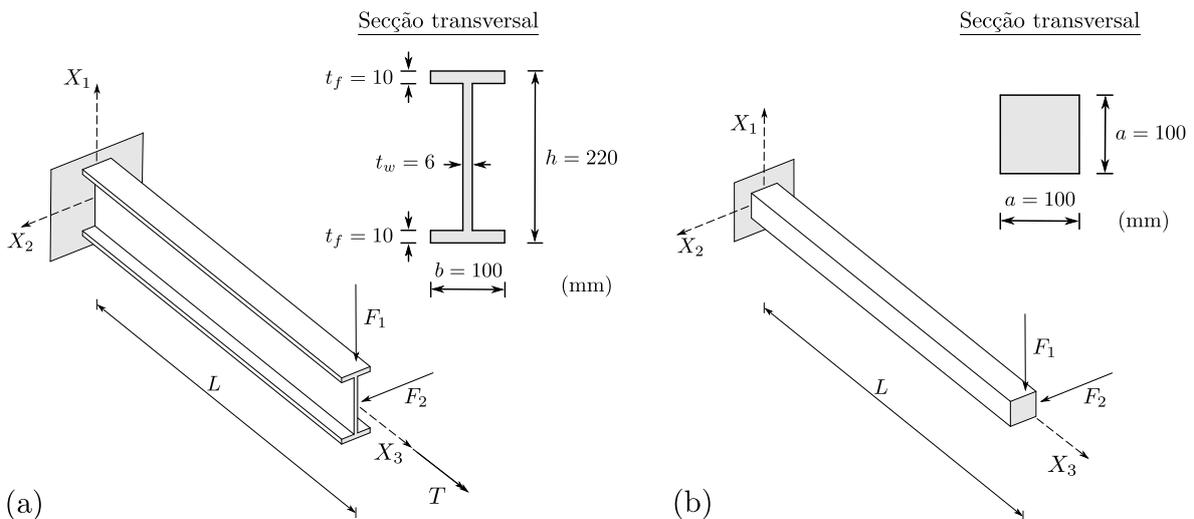


Figura 3.11: Vigas retas consideradas nos exemplos com movimento no espaço tridimensional.

### 3.4. Exemplos relativos a vigas retas em movimento no espaço

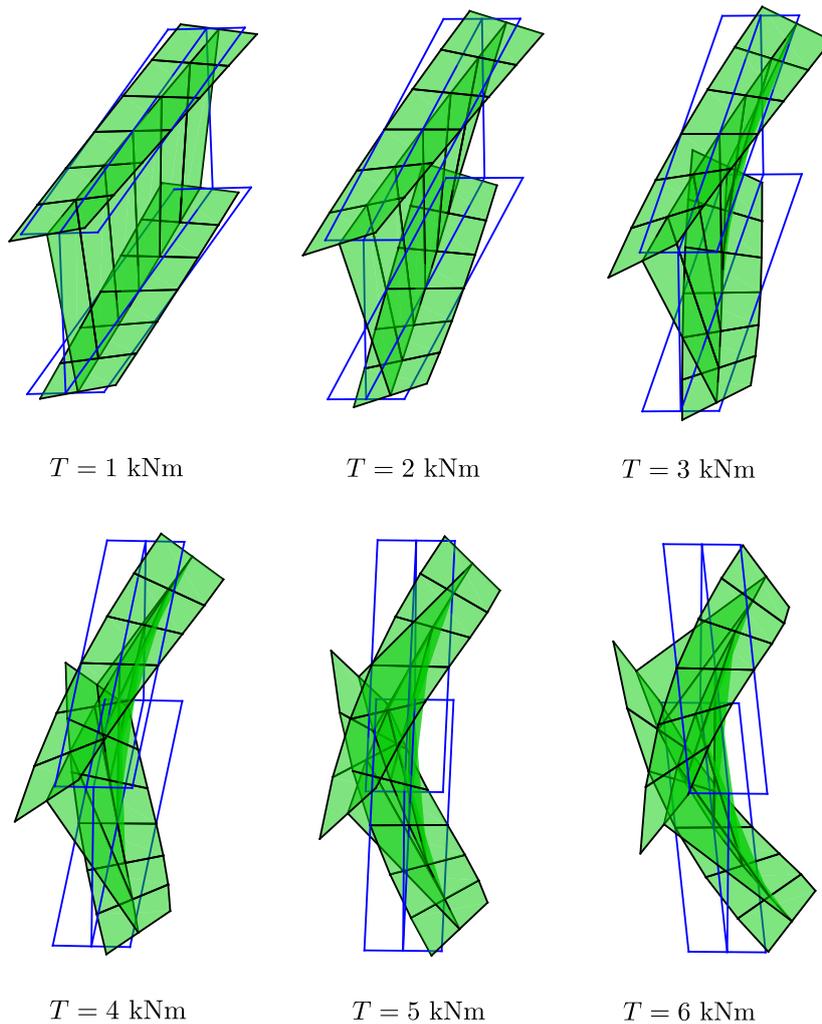


Figura 3.12: Torção uniforme: configurações deformadas.

à torção, o qual se encontra ilustrado na Figura 2.8 (b) — recorde-se que a sua “forma” é fornecida mas a sua real amplitude é dada por  $p$ .

A Figura 3.12 permite observar a configuração deformada da viga para vários valores do momento torsor (apenas se representa a superfície média das paredes). Note-se que, em acordo com a solução analítica, (i) a secção a meio vão não sofre qualquer rotação, em virtude da anti-simetria do problema, (ii) as secções rodam em torno do seu centro de corte numa rotação que aumenta linearmente com a distância ao meio-vão e (iii) o empenamento (deslocamento axial) é constante em toda a barra.

Deve salientar-se que o facto de a solução fornecida pela formulação proposta ser linear não está em acordo com as soluções clássicas para moderadas a grandes rotações. De facto, é bem conhecido que, para moderadas rotações, surge o chamado “efeito de Wagner” que induz um aumento da rigidez de torção (ver, por exemplo, Pi et al., 2005). A contabilização do efeito de Wagner na presente formulação constitui um dos desenvolvimentos futuros propostos.

### 3.4.2 Torção não-uniforme

Restringido o empenamento numa determinada secção, a torção não é mais uniforme, mobilizando-se uma parcela de rigidez associada ao termo de empenamento. A solução analítica da teoria linear (pequenos deslocamentos), para uma consola sujeita a um momento aplicado na extremidade livre é dada por (ver, por exemplo, Oden, 1967)

$$\varphi = \frac{T}{\alpha GJ} [\tanh(\alpha L) (\cosh(\alpha X_3) - 1) - \sinh(\alpha X_3) + \alpha X_3], \quad (3.26)$$

com

$$\alpha = \sqrt{\frac{GJ}{EI_w}}. \quad (3.27)$$

A influência da parcela não-uniforme é tanto maior quanto menor for o comprimento da viga. Por outro lado, à medida que nos afastamos da secção de encastramento, a contribuição da parcela de empenamento tende a desaparecer.

Para efeitos ilustrativos, considerou-se uma consola com a secção em I da Figura 3.11 (a), com  $L = 5$  m,  $E = 209$  GPa,  $\nu = 0,3$  e uma discretização de somente 1 elemento finito. Na Figura 3.13 (a) é possível observar a configuração deformada da peça para vários valores do momento aplicado. Na Figura 3.13 (b), por sua vez, comparam-se os resultados numéricos com a solução analítica (3.26). Apesar de a solução analítica ser válida apenas no contexto dos pequenos deslocamentos, observa-se que praticamente coincide com a fornecida pela formulação proposta (válida para grandes rotações), o que está certamente relacionado com o facto de a presente formulação não modelar o efeito de Wagner.

### 3.4.3 Consola com secção quadrada à flexão reta sem torção

O presente exemplo foi utilizado para aferir o desempenho do elemento proposto quando a configuração deformada é tridimensional, mas sem torção. Apesar de aparentar alguma simplicidade, este exemplo é algo exigente, na medida em que se impõe uma história de carregamento que provoca curvatura de torção entre incrementos de carga, conforme se explica de seguida.

Considera-se uma consola com secção quadrada, pelo que todos os eixos centrais são principais e a rigidez de flexão é invariante em relação ao eixo do carregamento. A geometria do problema corresponde à da Figura 3.11 (b), com  $L = 6$  m,  $E = 209$  GPa e  $\nu = 0,3$ . O carregamento  $F_1$  e  $F_2$  é aplicado de forma a que a magnitude da sua resultante  $F$  seja sempre igual a 100 kN, mas varia-se a sua direcção e sentido (note-se que a resultante é sempre paralela ao plano  $(X_1, X_2)$ ).

Naturalmente, qualquer que seja a orientação da carga, a peça fica sujeita à flexão reta sem torção, fletindo no plano que contém o eixo inicial da barra e a força aplicada. Contudo, no presente exemplo, a orientação da força é alterada *sempre a partir da última posição de equilíbrio*. Por outras palavras, após o primeiro incremento de carga (e atingida a convergência), os “incrementos” subsequentes correspondem sempre a uma alteração da orientação da força mas não da sua intensidade.

Este aparentemente simples detalhe da história de carregamento tem implicações não-triviais que se passam a explicar, remetendo a atenção para a Figura 3.14. Em primeiro lugar, note-se que carregar a barra sem alterar a orientação da força corresponde a que as secções transversais prossigam a trajetória  $A - B - C - D$ , que não introduz curvatura de torção, dado que os vetores  $\mathbf{t}$  pertencem à mesma geodésica. De facto, neste caso, os vetores

### 3.4. Exemplos relativos a vigas retas em movimento no espaço

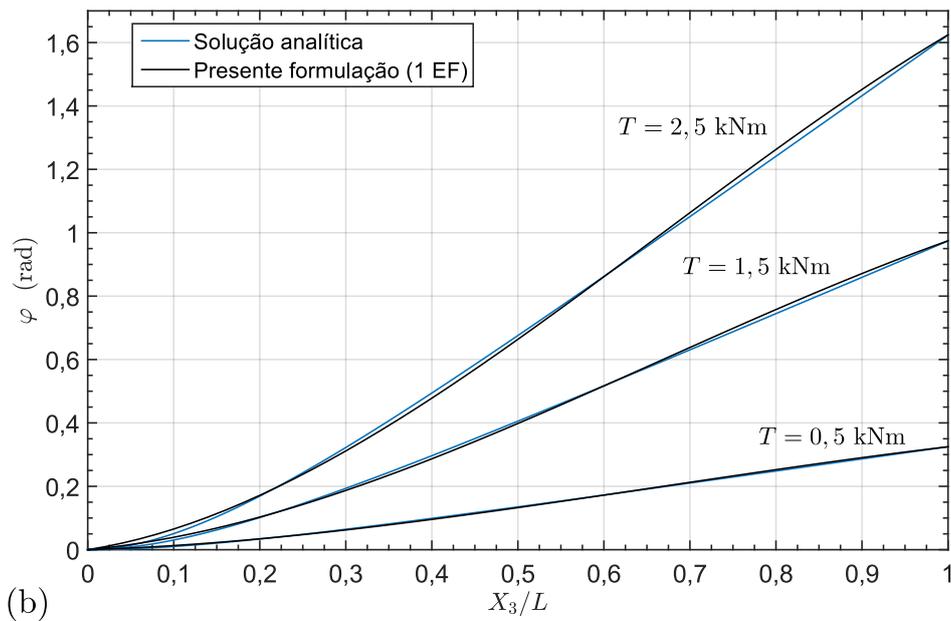
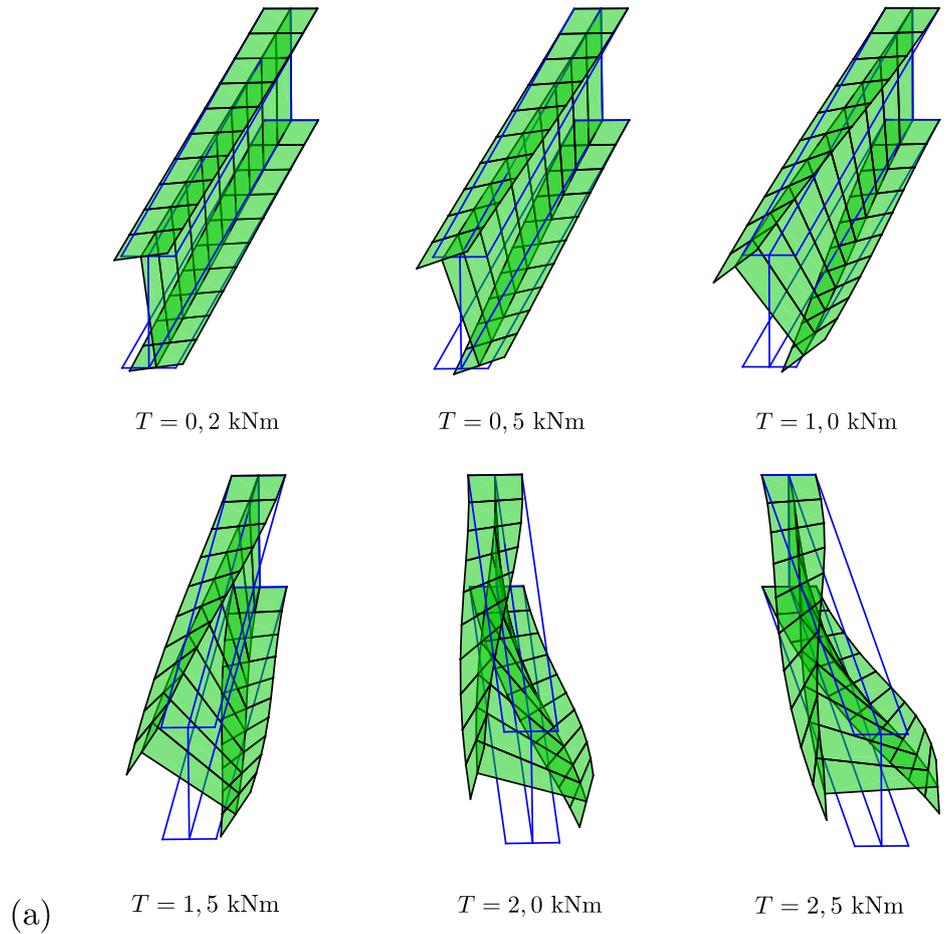


Figura 3.13: Torção não-uniforme: (a) configurações deformadas e (b) rotação de torção ao longo do comprimento da barra.

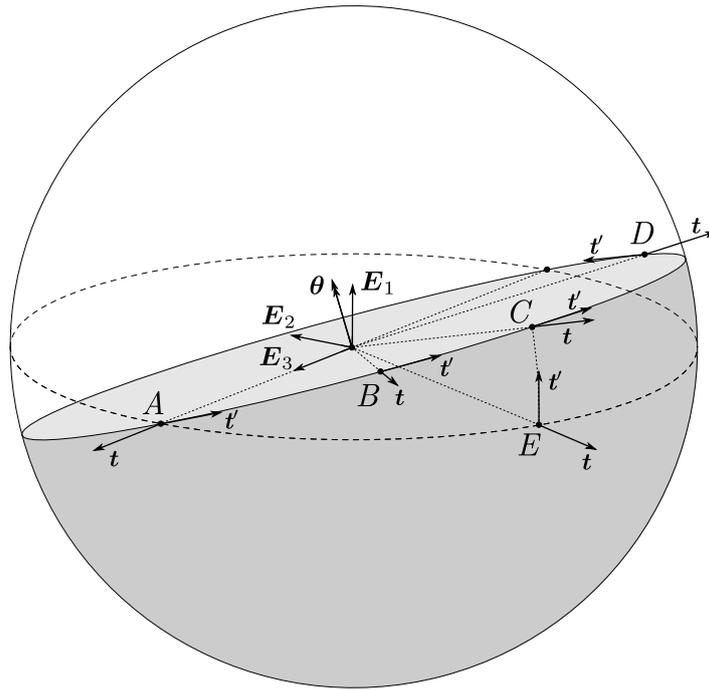


Figura 3.14: Trajetórias de rotações.

$\mathbf{t}$  e  $\mathbf{t}'$  de todas as secções da barra definem o mesmo plano na esfera da Figura, o qual contém também  $\mathbf{E}_3$ . Por conseguinte,  $(\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \cdot \mathbf{E}_3 = 0$  e a parcela da curvatura de torção associada a  $\mathbf{t}$  (recordar expressão (2.78)) é nula. Inversamente, a trajetória  $A - E - C$  que ocorre quando a direção da carga é alterada, implica a alteração da geodésica (*i.e.*, a alteração da direção de  $\mathbf{t}'$ ) e introduz torção em virtude da parametrização adotada, o que terá de ser compensado com  $\varphi \neq 0$  nos casos onde não ocorre torção. Assim, no presente exemplo, ao alterar a direção do carregamento a partir da última configuração de equilíbrio, está-se a obrigar a que se verifique  $\varphi \neq 0$  durante algumas iterações, até que seja atingida a próxima configuração de equilíbrio, com  $\varphi = 0$ . Esta afirmação confirmou-se com o decorrer das análises.

Os resultados obtidos com 4 elementos finitos são apresentados na Figura 3.15, onde são comparados com resultados obtidos com 30 elementos finitos co-rotacionais de Euler-Bernoulli (ADINA, na Figura (c) apenas). Para além de se registar uma coincidência perfeita com os resultados do ADINA, observa-se que a resposta roda exatamente com o plano de solitação. Os resultados obtidos confirmam que  $\varphi = 0$  em todas as configurações de equilíbrio.

### 3.4.4 Encurvadura lateral de uma consola com secção em I

O último exemplo relativo a vigas retas modela a encurvadura lateral, por flexão-torção, de uma consola com secção em I. A consola é carregada verticalmente com uma força segundo  $X_1$ , de modo a provocar a encurvadura lateral. A geometria adotada consiste numa secção composta por um perfil em I, em consola (ver Figura 3.11 (a)), com  $L = 6$  m,  $E = 209$  GPa e  $\nu = 0,3$ .

A Tabela 3.2 apresenta uma comparação entre os valores da carga de bifurcação obtida com (i) a presente formulação, com 6 elementos finitos, (ii) um modelo de elementos finitos de casca de 4 nós (ADINA, ver Figura 3.17) e (iii) o programa LTBeam (Galéa, 2012), que utiliza elementos finitos de barra. No âmbito da presente formulação, a carga crítica é determinada

### 3.4. Exemplos relativos a vigas retas em movimento no espaço

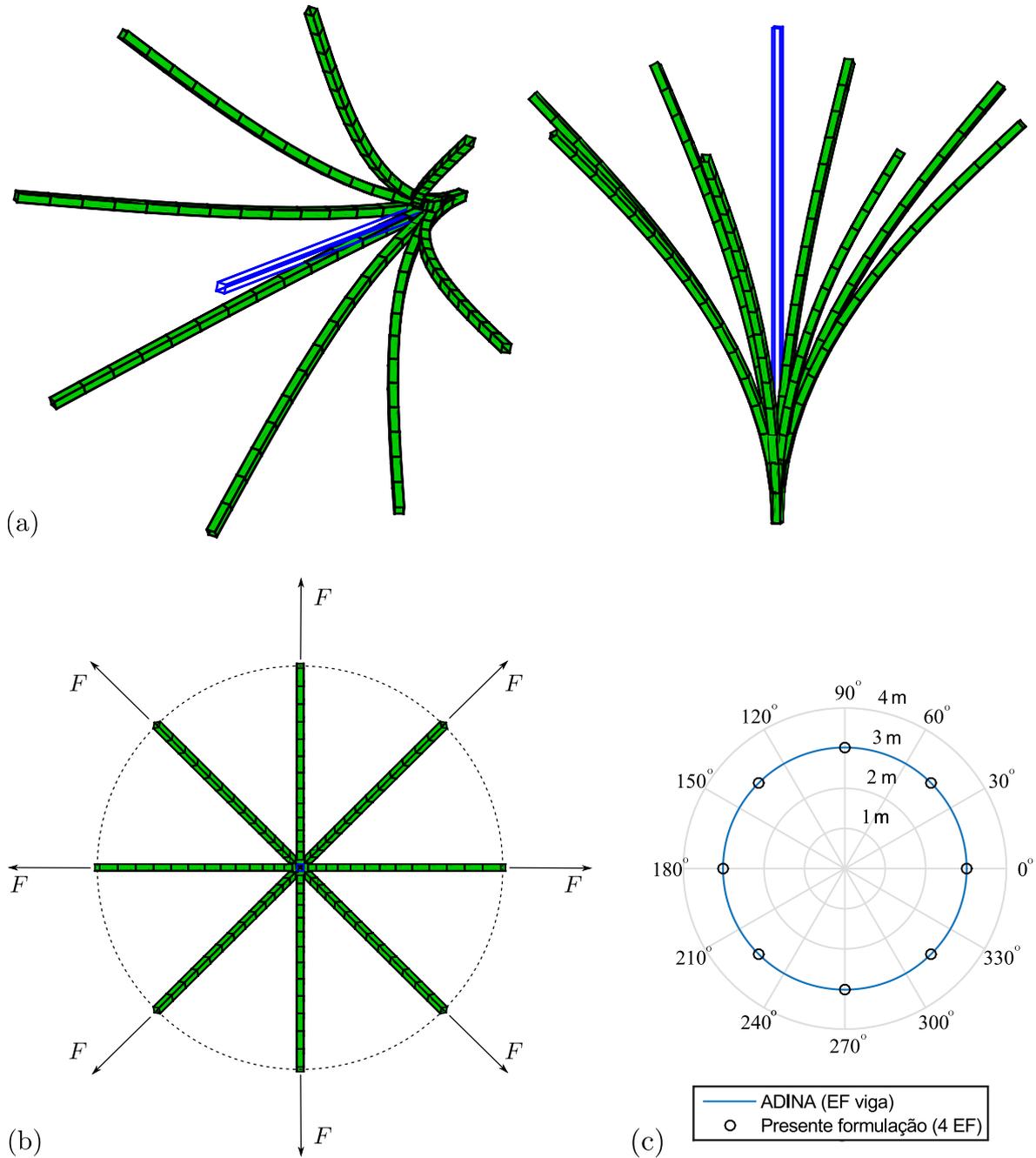


Figura 3.15: Consola com secção quadrada à flexão reta sem torção: (a-b) configurações deformadas obtidas com o elemento proposto (o último caso corresponde a um alçado frontal) e (c) deslocamento máximo em função da direção do carregamento.

### Capítulo 3. Exemplos de aplicação

---

incrementando a carga e detetando em que instante ocorre a primeira alteração de sinal dos valores próprios da matriz de rigidez tangente. Como se consideram os deslocamentos de pré-encurvadura, o procedimento adotado não corresponde à clássica análise linear de estabilidade. Em contraste, no ADINA e no LTBeam as cargas críticas são obtidas através de uma genuína análise linear de estabilidade.

Observa-se que os valores obtidos com a presente formulação estão cerca de 3,4% acima dos do LTBeam (o que pode ser parcialmente explicado pela influência da deformação de pré-encurvadura) e são praticamente coincidentes com os do ADINA.

De seguida, introduziu-se uma pequena imperfeição na viga, através da imposição de uma carga lateral  $F_2 = 0,01$  kN (constante ao longo da história de carregamento) e obtiveram-se os diagramas carga-deslocamento (Figura 3.16) e as configurações deformadas (Figura 3.17), usando (i) o elemento finito proposto, com várias discretizações e recorrendo a controle de deslocamento ( $u_1$  da extremidade livre) e (ii) um modelo de elementos finitos de casca de 4 nós (ADINA). O gráfico da Figura 3.16 permite retirar as seguintes conclusões:

- (i) A presente formulação apresenta resultados quase idênticos para qualquer um dos níveis de discretização testados. Em particular, para 6 elementos os resultados são praticamente coincidentes com os obtidos com 20 elementos.
- (ii) A comparação entre os resultados obtidos com a formulação proposta e o modelo de elementos de casca revela que as trajetórias são praticamente coincidentes até uma carga de cerca de 9,0 kN. A partir deste valor, a formulação proposta fornece uma resposta mais rígida, o que se relaciona com o facto de não incorporar o efeito de Wagner, conforme discutido por Campello e Lago (2014).

Apesar das diferenças obtidas para os níveis mais elevados de carga, observa-se na Figura 3.17 que existe uma muito boa concordância entre os dois modelos.

Tabela 3.2: Encurvadura lateral: cargas de bifurcação.

Presente formulação (6 EF)	ADINA (EF casca)	LTBeam
7,302 kN	7,300 kN	7,061 kN

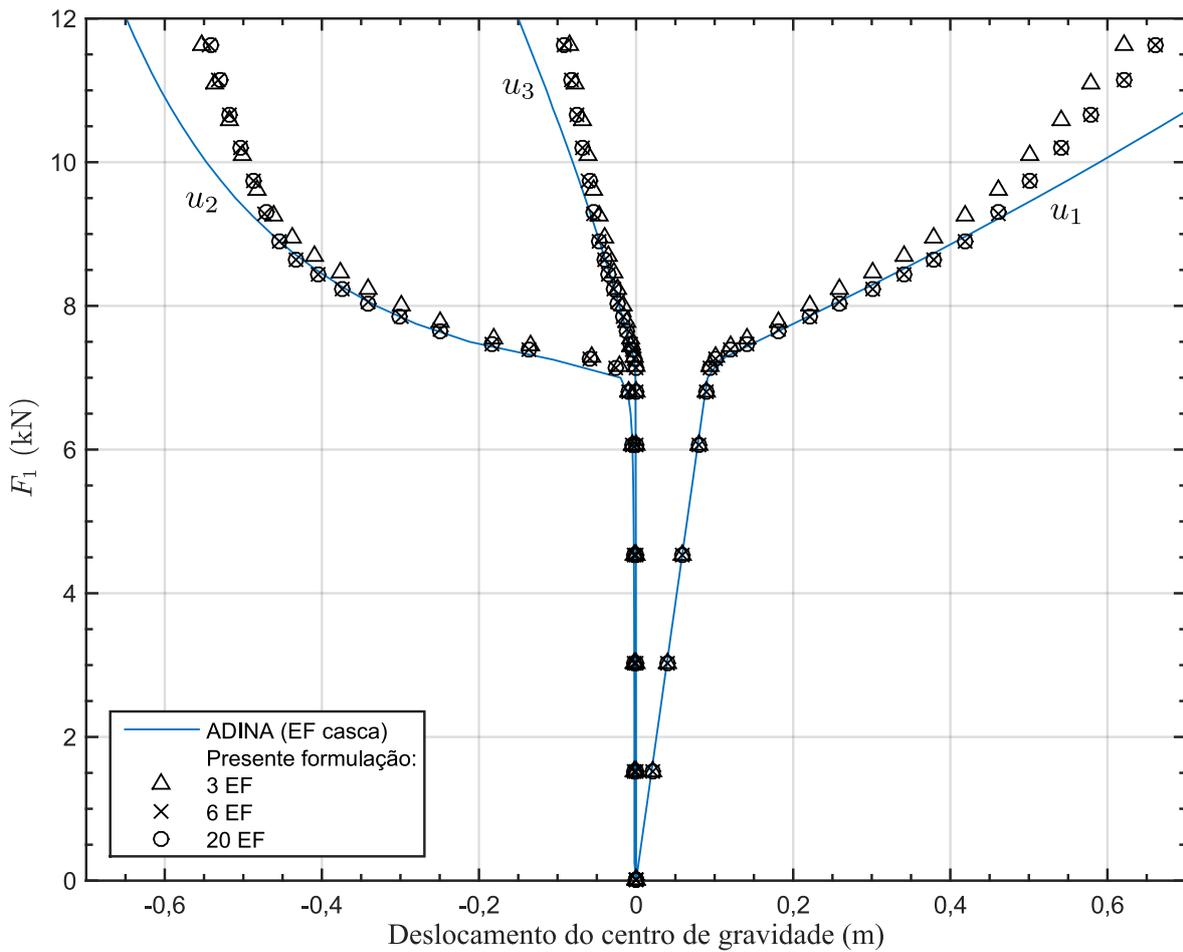


Figura 3.16: Encurvadura lateral: diagramas carga-deslocamento.

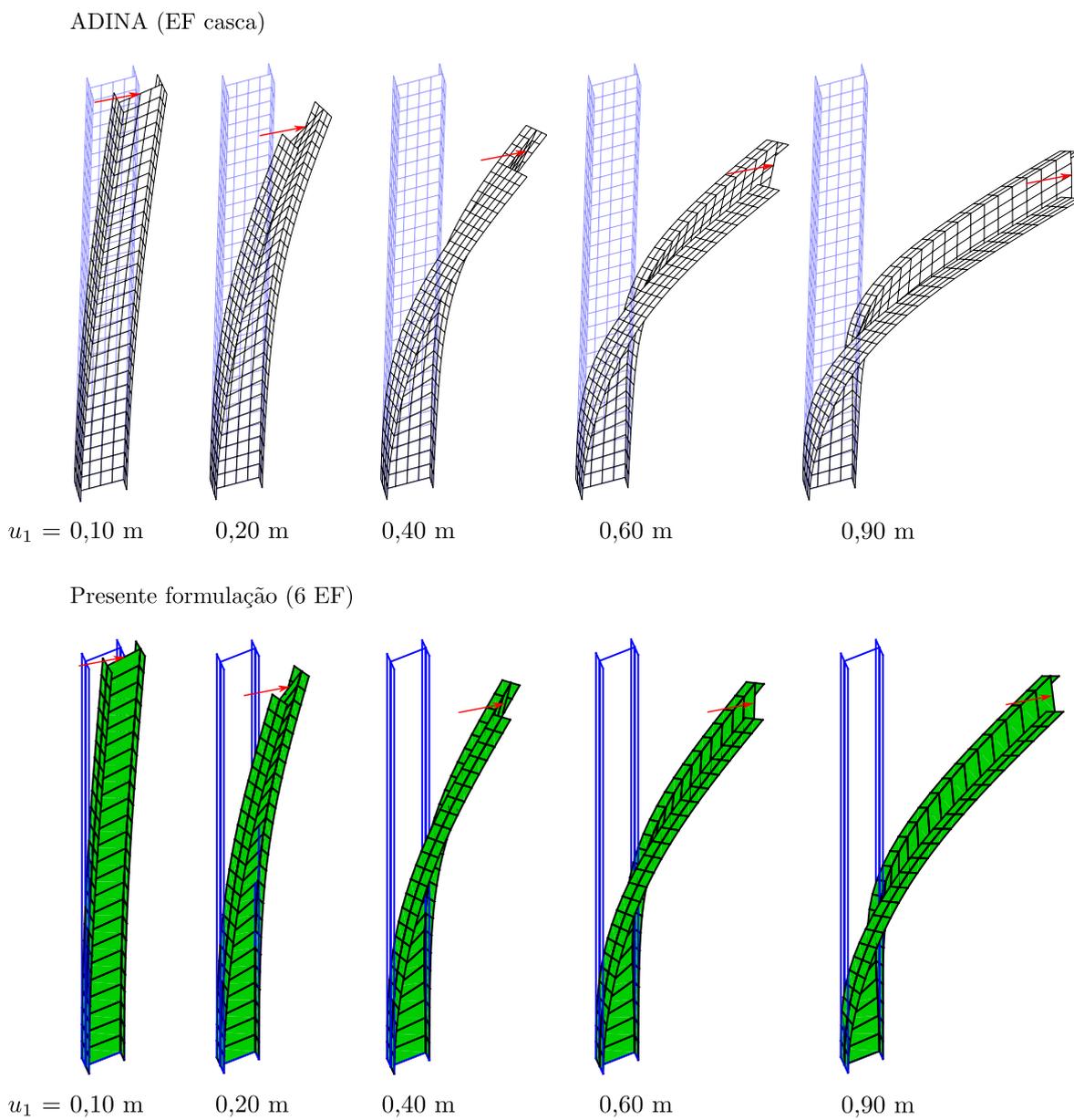


Figura 3.17: Encurvadura lateral: configurações deformadas.

### 3.5 Exemplos relativos a vigas curvas em movimento no espaço

Por fim, analisam-se problemas em que a configuração inicial é curva e o movimento ocorre no espaço tridimensional. Nos dois exemplos que se seguem, optou-se por não adotar unidades, à semelhança dos autores que previamente os estudaram. É de referir também que, por simplificação, não houve a consideração de empenamento associado à torção.

#### 3.5.1 Viga curva de Bathe e Bolourchi

O presente exemplo é muito utilizado para validar elementos finitos, tendo sido inicialmente apresentado por Bathe e Bolourchi (1979). Trata-se de uma consola cuja configuração inicial descreve um arco de circunferência de raio  $R = 100$  e ângulo ao centro igual a  $45^\circ$ , com secção transversal quadrada de lado unitário, com  $E = 107$  e  $\nu = 0$ . O carregamento consiste numa força transversal  $F_2$ , a qual é aplicada incrementalmente até atingir magnitude igual a 600 (ver Figura 3.18).

Conforme refere Ritto Corrêa (2004), nem sempre os diversos autores estabelecem de forma clara os parâmetros que consideraram na sua análise. Em particular, o fator de rigidez à torção assumido não é por vezes fornecido, sendo este fator a fonte de alguma da discrepância que se observa entre os resultados obtidos. No presente trabalho toma-se  $J = 0,141$  e  $J = 1/6$ , a título comparativo. Conforme se pode constatar na Tabela 3.3, os valores obtidos com a presente formulação, com 8 elementos finitos, estão em boa concordância com os dos restantes autores.

Por último, a Figura 3.19 mostra as configurações deformadas obtidas com a presente formulação, ilustrando a magnitude de deslocamentos envolvida.

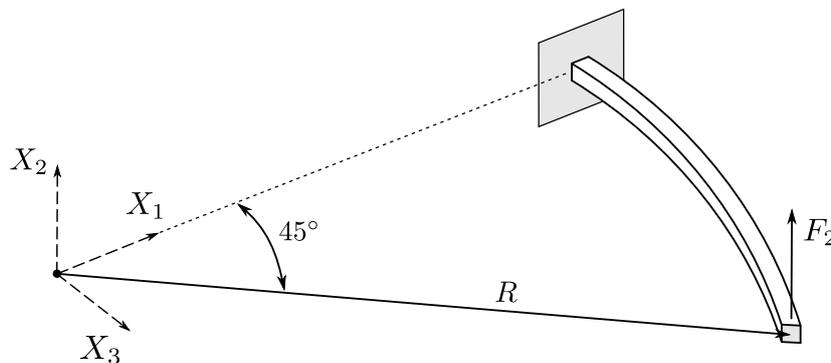


Figura 3.18: Geometria e carregamento da viga curva de Bathe e Bolourchi.

#### 3.5.2 Viga helicoidal

O presente exemplo tem por objetivo o estudo de uma configuração inicial complexa. O exemplo discutido foi proposto por Meier et al. (2015), consistindo numa viga em consola, com secção transversal quadrada de lado 10, com  $E = 1,0$  e  $\nu = 0$ . Assumiu-se também que  $J$  é dado pelo momento polar de inércia. O carregamento é composto por uma carga axial (ver Figura 3.20 (a)).

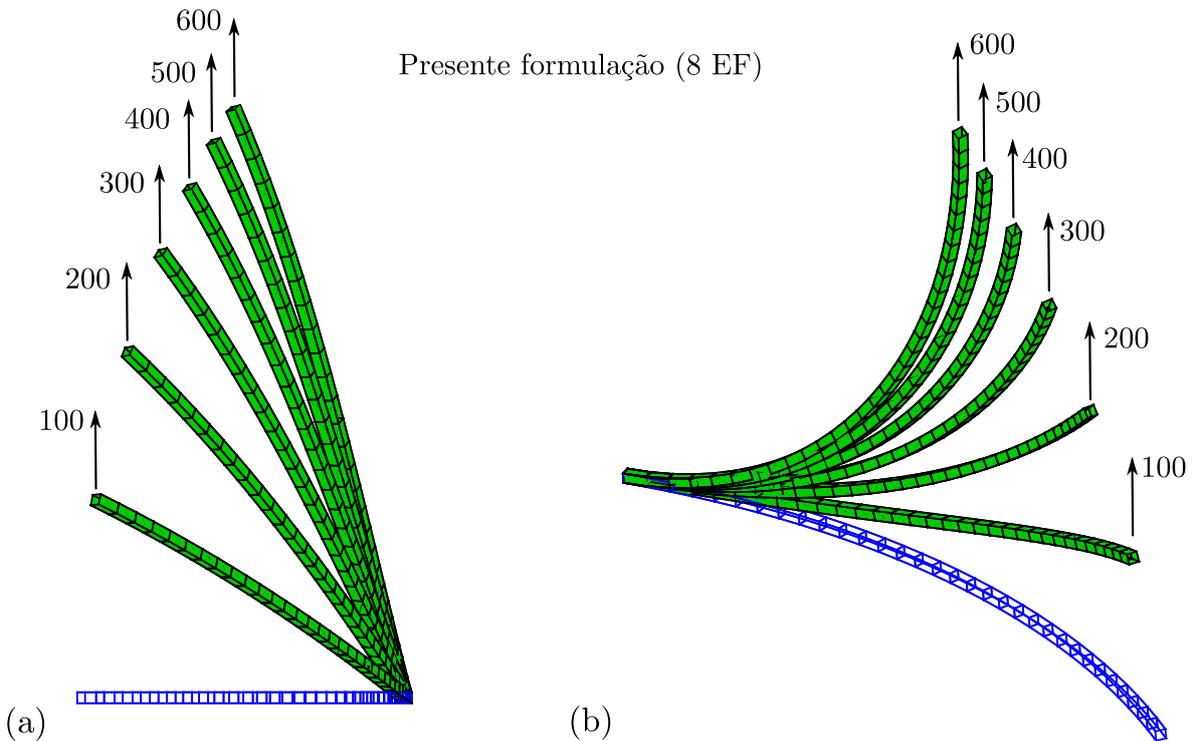


Figura 3.19: Viga curva de Bathe e Bolourchi: configurações deformadas (a) em alçado no plano  $(X_1, X_2)$  e (b) em perspectiva.

Tabela 3.3: Viga curva de Bathe e Bolourchi: deslocamento vertical da extremidade livre para  $F_2 = 600$ .

Modelo	$u_1$	$u_2$	$u_3$
Bathe e Bolourchi (1979)	13,4	53,4	-23,5
Simo e Vu-Quoc (1986)	13,49	53,37	-23,48
Dvorkin et al. (1988)	13,6	53,3	-23,5
Ibrahimbegović et al. (1995)	13,668	53,498	-23,697
Cardona e Geradin (1999)	13,74	53,5	-23,67
Jelenić e Crisfield (1999)	13,48282	53,37149	-23,47948
Schulz e filippou (2001)	13,53	53,37	-23,46
Ritto Corrêa (2004), $J = 1/6$	13,54669	53,37303	-23,45009
Ritto Corrêa (2004), $J = 0,141$	13,66798	53,49801	-23,69646
Presente formulação (8 EF), $J = 1/6$	13,72582	53,57811	-23,78990
Presente formulação (8 EF), $J = 0,141$	13,73079	53,58506	-23,79981

Na configuração inicial o vetor de posição é dado por

$$[\mathbf{r}_0] = R_0 \begin{bmatrix} \text{sen}(\beta) \\ \cos(\beta) - 1 \\ \frac{6}{81\pi^2}\beta^2 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

### 3.5. Exemplos relativos a vigas curvas em movimento no espaço

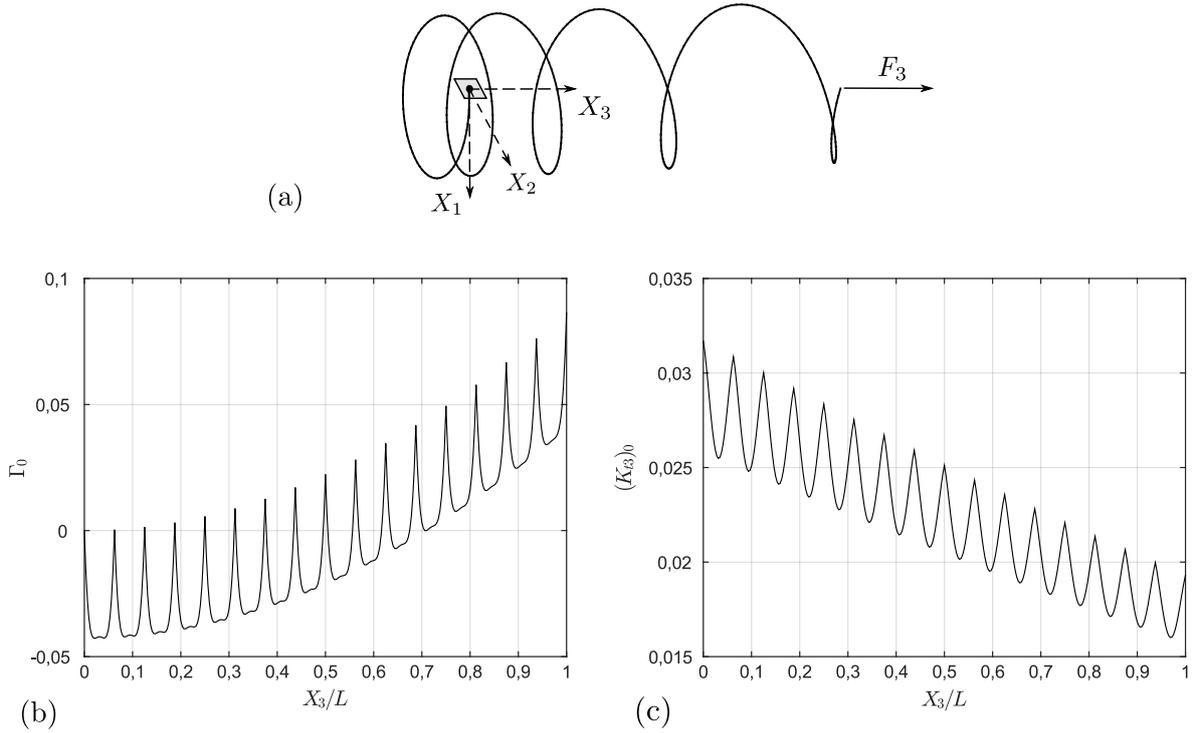


Figura 3.20: Viga helicoidal: (a) geometria e carregamento, (b) evolução da extensão inicial e (c) da curvatura de torção inicial devida a  $\mathbf{t}$ , para 16 EF.

onde  $R_0 = 34,36239$  e  $\beta \in [0, 9\pi]$ . O comprimento da barra é dado por

$$\int_0^{9\pi} \|\mathbf{r}'_{0,\beta}\| d\beta = \int_0^{9\pi} R_0 \left\| \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ -\text{sen}(\beta) \\ \frac{12}{81\pi^2}\beta \end{bmatrix} \right\| d\beta = 1000, \quad (3.29)$$

sendo  $\|\mathbf{r}'_{0,\beta}\|$  aproximadamente constante e igual a  $R_0$  (em rigor, varia entre  $R_0$ , para  $\beta = 0$ , e  $1,08 R_0$ , para  $\beta = 9\pi$ ). Assim, aproxima-se a configuração inicial por  $X_3 = \beta R_0$ , o que corresponde a adotar

$$[\mathbf{r}_0] = R_0 \begin{bmatrix} \text{sen}\left(\frac{X_3}{R_0}\right) \\ \cos\left(\frac{X_3}{R_0}\right) - 1 \\ \frac{6}{81\pi^2} \left(\frac{X_3}{R_0}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Tal como no exemplo da Secção 3.3, a configuração inicial da discretização por elementos finitos é obtida calculando os valores nodais de  $\mathbf{r}_0$  e  $\mathbf{r}'_0$ , a partir dos quais se estabelece o vetor  $\mathbf{d}_0$ . Os gráficos da Figura 3.20 mostram o andamento de  $\Gamma_0$  e  $(K_{t3})_0$  ao longo da barra, para uma discretização com 16 elementos. Observa-se que estes parâmetros não são nulos, pelo que haveria que corrigir a relação constitutiva. No entanto, essa será uma tarefa a desenvolver no futuro.

Na Figura 3.21 apresentam-se as configurações de equilíbrio, para os incrementos de carga impostos. Finalmente, constam na Tabela 3.4, os valores obtidos com a presente formulação, com 16 elementos finitos, e os obtidos por Meier et al. (2015). Estes resultados estão em muito boa concordância, observando-se um erro máximo de 5,0% para  $u_1$  e um erro mínimo

Presente formulação (16 EF)

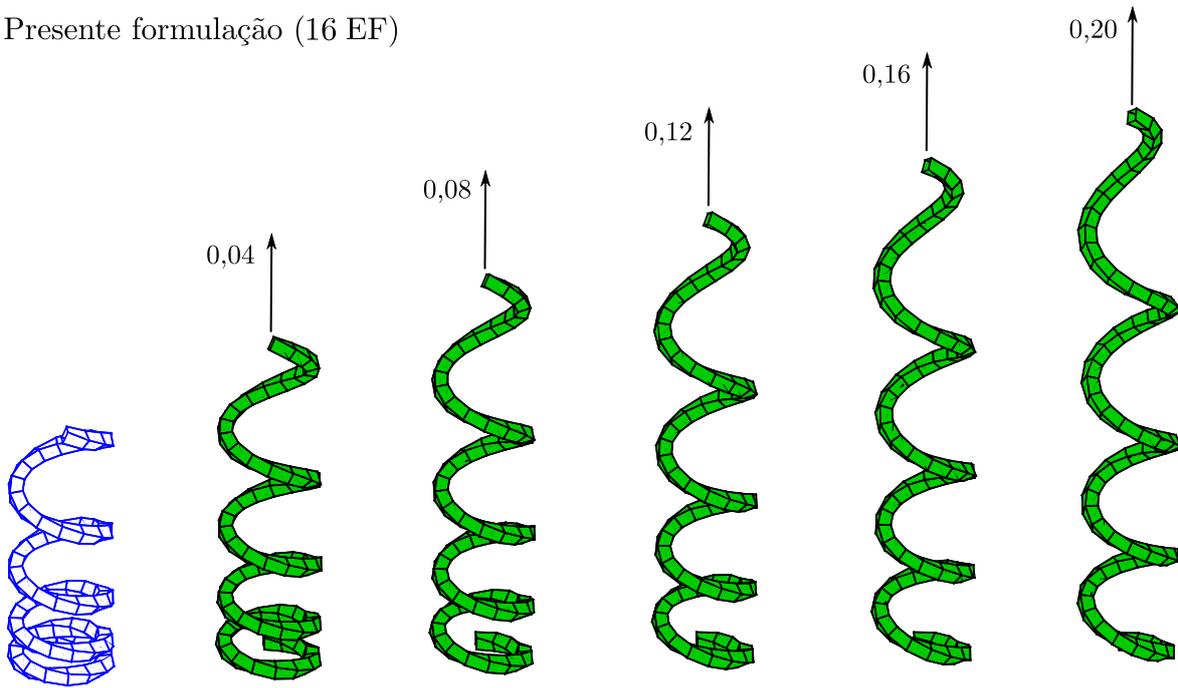


Figura 3.21: Viga helicoidal: configurações deformadas.

Tabela 3.4: Viga helicoidal: deslocamento da extremidade livre para  $F_3 = 0, 20$ .

Modelo	$u_1$	$u_2$	$u_3$
Meier et al. (2015), 32 EF	6,9662594	34,9371216	266,2444443
Presente formulação (16 EF)	7,3292624	35,0906542	259,4486927

de 0,4% para  $u_2$ . As diferenças que se fazem notar devem-se principalmente ao facto de não se ter considerado  $\Gamma_0$  nulo.

## Capítulo 4

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 4.1 Conclusões e principais contribuições

Neste trabalho desenvolveu-se, implementou-se e validou-se uma formulação geometricamente exata para barras esbeltas de eixo reto ou curvo, com movimento no espaço tridimensional. Demonstrou-se que a formulação é muito eficiente e precisa, mesmo quando ocorrem grandes deslocamentos e/ou a configuração inicial ou final é tridimensional e complexa, sendo esta a principal conclusão do trabalho efetuado. O facto de a descrição cinemática admitir que não ocorre deformação por corte permite eliminar a retenção por corte e ainda reduzir o número de parâmetros cinemáticos independentes, o que permite obter ganhos em termos de eficiência. No entanto, o elemento é sensível à retenção de membrana, o que foi mitigado recorrendo a integração reduzida. É ainda importante salientar que a parametrização adotada para o tensor de rotação torna as expressões significativamente complexas de tratar, mas ainda assim foi possível atingir um nível de simplificação considerável.

As contribuições originais, em relação ao trabalho de Meier et al. (2014, 2015), foram as seguintes:

- (i) Introduziu-se um grau de liberdade adicional na descrição cinemática, associado ao empenamento devido à torção. Este grau de liberdade é essencial para capturar o comportamento à torção de barras com secção transversal de parede fina.
- (ii) Todas as relações fundamentais, nomeadamente as relações cinemáticas, foram claramente demonstradas, uma tarefa que se revelou estar longe de ser trivial.
- (iii) A linearização das equações de equilíbrio foi escrita em termos dos parâmetros interpolados diretamente no contexto do método dos elementos finitos.

Em acréscimo, não é demais referir que se desenvolveu um programa em MATLAB para realizar as análises com o elemento finito proposto, tratar os resultados obtidos e proceder à sua visualização.

### 4.2 Desenvolvimentos futuros

A formulação proposta apresenta um vasto leque de possibilidades de desenvolvimento a serem exploradas. Entre as várias possibilidades, considera-se que as seguintes são particularmente relevantes:

1. Conforme foi discutido na Secção 2.5, a parametrização do tensor de rotação possui uma singularidade, a qual seria importante remover.
2. A formulação foi desenvolvida admitindo que os eixos  $X_1$  e  $X_2$  são eixos centrais principais da secção e coincidentes com o centro de corte. A generalização a secções em que tal não suceda (havendo portanto uma excentricidade em relação ao centro de corte) permitirá analisar barras com secções mais gerais, nomeadamente secções em Z, C e U, as quais são bastante comuns.
3. A implementação de leis constitutivas mais gerais, não-lineares, seria fundamental não só para modelar colapsos elastoplásticos, mas também para obter um comportamento idêntico ao que corresponde à lei linear entre o tensor de deformação de Green-Lagrange e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Note-se que este último aspeto é fundamental para capturar o efeito de Wagner e tornar a formulação independente da deformação (fictícia) que ocorre entre a configuração de referência e inicial.
4. A formulação proposta inclui um grau de liberdade associado ao empenamento de torção. Seria interessante levar este conceito um pouco mais longe, considerar mais modos de deformação da secção transversal, nomeadamente modos associados aos dois esforços transversos — neste caso a formulação seria aplicável a barras não esbeltas, mas ainda assim seria insensível à retenção de corte, dado que a descrição cinemática reproduz exatamente a flexão sem deformação por corte.
5. A aplicação da formulação a estruturas reticuladas necessita que sejam implementadas equações de constrangimento para representar os diferentes tipos de ligações e apoios. Por outro lado, seria importante permitir a aplicação de forças fora do eixo da barra (o que influencia significativamente o comportamento à encurvadura lateral de vigas de aço de secção aberta) e de momentos tridimensionais.
6. Por fim, a extensão da formulação a problemas dinâmicos permitiria alargar vastamente o seu domínio de aplicação e interesse prático.

# Bibliografia

- Arantes e Oliveira, E. R., 1999. *Elementos da Teoria da Elasticidade*. IST Press, Lisboa, Portugal.
- Bathe, K. J., 2014. *ADINA System* (versão 9.0, 900 nós), ADINA R&D Inc.
- Bathe, K. J. e Bolourchi, S., 1979. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14**:961–986.
- Batoz, J. L., e Dhatt, G., 1979. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **14**:1262–1267.
- Bonet, J. e Wood, R., 1997. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra.
- Boyer, F. e Primault, D., 2004. Finite element of slender beams in finite transformations: a geometrically exact approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**:669–702.
- Campello, E. M. e Lago, L. B., 2014. Effect of higher order constitutive terms on the elastic buckling of thin-walled rods. *Thin-Walled Structures*, **77**:8–16.
- Cardona, A. e Geradin, M., 1988. A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**:2403–2438.
- Crisfield, M. A., 1991. *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 1: essentials*. John Wiley & Sons, Chichester, Inglaterra.
- Crisfield, M. A., 1997. *Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 2: advanced topics*. John Wiley & Sons, Chichester, Inglaterra.
- CEN, 2010. *EN 1993-1-1 Eurocódigo 3: Projecto de estruturas de aço, Parte 1-1: Regras gerais e regras para edifícios*. Comité Europeu de Normalização, Bruxelas, Bélgica.
- DaDeppo, D. A. e Schmidt, R., 1975. Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load. *Journal of Applied Mechanics*, **42**(4):894–896.
- Dvorkin, E. N., Onate, E. e Oliver, J., 1988. On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**:1597–1613.
- Freitas, R., 2011. *Um elemento finito para barras esbeltas baseado numa teoria geometricamente exacta*, Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Almada, Portugal.
- Galéa, Y., 2012. *LTBeam* (versão 1.0.11), CTICM.

## Bibliografia

---

- Gerstmayr, J. e Irschik, H., 2008. On the correct representation of bending and axial deformation in the absolute nodal coordinate formulation with an elastic line approach. *Journal of sound and vibration*, **318**:461–487.
- Gonçalves, R., 2007. *Análise de vigas de parede fina com secção deformável: novas formulações e aplicações*, Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Gonçalves, R., 2012. A geometrically exact approach to lateral-torsional buckling of thin-walled beams with deformable cross-section. *Computers & Structures*. **106**:9–19.
- Gonçalves, R. e Carvalho, J., 2014. An efficient geometrically exact beam element for composite columns and its application to concrete encased steel I-sections. *Engineering Structures*, **75**:213–224.
- Ibrahimbegović, A., 1995. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **122**:11–26.
- Ibrahimbegović, A., Frey, F. e Kozar, I., 1995. Computational aspects of vector-like parametrization of three-dimensional finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**:3653–3673.
- Jelenić, G. e Crisfield, M. A., 1999. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain invariant finite element for statics and dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **171**:141–171.
- Kirchhoff, G., 1859. Über des gleichgewicht und die bewegung eines unendlich dunnen elastischen stabes. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik (Crelle)*, **56**:285–313.
- Lourenço, P. B., 1999, *Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear*, Escola de Engenharia, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal.
- Meier, C., Popp, A. e Wall, W. A., 2014. An objective 3D large deformation finite element formulation for geometrically exact curved Kirchhoff rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **278**:445–478.
- Meier, C., Popp, A. e Wall, W. A., 2015. A locking-free finite element formulation and reduced models for geometrically exact Kirchhoff rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **290**:314–341.
- Murray, N. W., 1986. *Introduction to the theory of thin-walled structures*. Clarendon Press, Oxford, Reino Unido.
- Oden, J. T., 1967. *Mechanics of elastic structures*. McGraw-Hill, Nova Iorque, Estados Unidos da América.
- Pi, Y. L., Bradford, M. A. e Uy, B., 2005. A spatially curved-beam element with warping and Wagner effects. *International journal for numerical methods in engineering*, **63**:1342–1369.
- Ritto Corrêa, M., 2004. *Análise de estruturas reticuladas: rumo a uma teoria geometricamente exacta, cinematicamente completa e fisicamente não linear*. Tese de Doutoramento, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal.

- Schulz, M. e Filippou, F. C., 2001. Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**:761–785.
- Simo, J. C., 1985. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**:55–70.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L., 1986. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: computational aspects. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **58**:79–116.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L., 1991. A geometrically-exact rod model incorporating shear and torsion-warping deformation. *International Journal of Solids and Structures*, **27**(3):371–393.
- The MathWorks Inc., 2014. *Matlab R2014b* (versão 8.4), Massachusetts, Estados Unidos da América.

