Capítulo 9

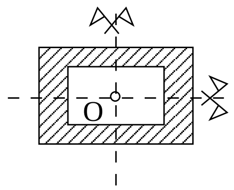
Momentos de inércia das figuras planas

9.1 Introdução

Definições:

eixo de simetria: recta, que se existir, divide a figura em duas partes tais que estejam uma para a outra como um objecto para a sua imagem no espelho.

centro de simetria ponto de cruzamento de dois eixos de simetria. Uma figura plana só poder ter um centro de simetria.

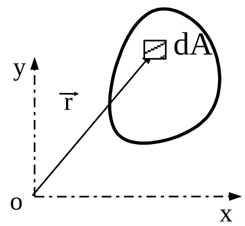


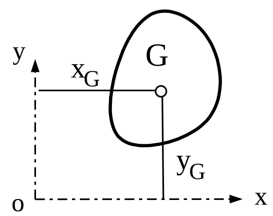
momento estático da 1ª ordem de área A de uma figura em relação a um pólo O (Capítulo 7) é:

$$\vec{S}_O = \int_A \vec{r}\,\mathrm{d}A \tag{9.1}$$

onde $\mathrm{d}A$ é a área elementar e $\vec{r}$ representa o vector posição da área elementar ao ponto O.

Os momentos estáticos em relação aos eixos de simetria são sempre nulos.





centro de gravidade, centróide, centro de massa de uma figura é o ponto de coordenadas $(x_G\,, y_G)$ do plano da figura dado por:

$$x_G = \frac{\int x\,\mathrm{d}A}{A}\,; \qquad y_G = \frac{\int y\,\mathrm{d}A}{A}\,.$$

eixos centrais passam pelo centro de gravidade. O centro de gravidade coincide com o centro de simetria, se este existir. O centro de gravidade existe sempre, podendo estar fora da figura.

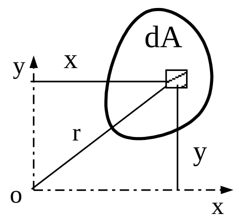
momento da 2ª ordem (momento de inércia – geométrica) de área A de uma figura em relação a um eixo e, co-planar com ela é dado por:

$$I_{ee} = \int_A r^2\,\mathrm{d}A \tag{9.2}$$

onde r é a distância ao eixo da área elementar $\mathrm{d}A$.

Em relação a dos eixos coordenados x e y:

$$I_{xx} = \int_A y^2\,\mathrm{d}A\,; \quad I_{yy} = \int_A x^2\,\mathrm{d}A\,. \tag{9.3}$$



O momento de inércia esta relacionado com o efeito dos sistemas de forças distribuídas numa área (volume).

momento polar de inércia de área A de uma figura em relação ao eixo z ou um pólo (ponto O origem dos eixos coordenados) é dado por:

$$I_p = \int_A r^2\,\mathrm{d}A \;= \int_A (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A = I_{xx} + I_{yy}\,. \tag{9.4}$$

produto de inércia de área A de uma figura em relação a dois eixo co-planares com ela, eixos coordenados x e y, é dado por:

$$I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A\,. \tag{9.5}$$

O produto de inércia é relevante sempre que se trata de uma secção sem eixo de simetria ou no caso da rotação dos eixos.

tensor de inércia Os momentos (I_{xx}, I_{yy}) e o produto (I_{xy}) de inércia de uma figura plana referida a um sistema de eixos ortogonais $(x\ ,\ y)$, formam um tensor de 2ª ordem simétrico:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

raio de giração de área A de uma figura em relativamente aos eixos coordenados, é dado por:

$$k_x = \sqrt{\frac{I_{xx}}{A}}\ ; \quad k_y = \sqrt{\frac{I_{yy}}{A}} \tag{9.6}$$

O raio de giração polar é dado por:

$$k_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{9.7}$$

O raio de giração mede a distribuição da área a partir do eixo. A unidade SI $[m]$.

Observações

O momento de inércia é momento do momento estático.

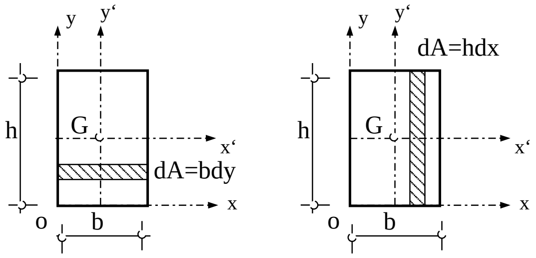
O momento de inércia e o momento polar inércia são sempre positivos.

O produto de inércia pode tomar valores positivo, negativo ou nulo.

9.2 Cálculo dos momentos de inércia por integrais

Rectângulo
Os momentos de inércia em relação aos eixos x e y.

$$\mathrm{d}I_{xx} = y^2\mathrm{d}A = y^2\,b\mathrm{d}y \quad \Rightarrow I_{xx} = \int_A \mathrm{d}I_{xx} == \int_0^h y^2 b\mathrm{d}y = \frac{bh^3}{3}$$
$$\mathrm{d}I_{yy} = x^2\mathrm{d}A = x^2\,b\mathrm{d}x \quad \Rightarrow I_{yy} = \int_A \mathrm{d}I_{yy} == \int_0^b x^2 h\mathrm{d}x = \frac{hb^3}{3}$$



Os momentos de inércia em relação aos eixos centrais x' e y'.

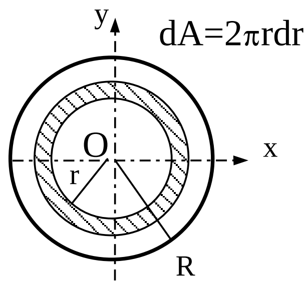
$$\mathrm{d}I_{x'x'} = \mathrm{d}I'_{xx} = y'^2\mathrm{d}A = y'^2\, b\mathrm{d}y' \;\;\Rightarrow I'_{xx} = \int_A \mathrm{d}I'_{xx} == \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 b\mathrm{d}y' = \frac{bh^3}{12}$$
$$\mathrm{d}I_{y'y'} = \mathrm{d}I'_{yy} = x'^2\mathrm{d}A = x'^2\, b\mathrm{d}x' \;\;\Rightarrow I'_{yy} = \int_A \mathrm{d}I'_{yy} == \int_{-b/2}^{b/2} x'^2 h\mathrm{d}x' = \frac{hb^3}{12}$$

O produto de inércia em relação aos eixos centrais x' e y' é nulo sendo eixo de simetria. O produto de inércia em relação aos eixos x e y é:

$$\mathrm{d}I_{xy} = x\, y\mathrm{d}A \;\;\Rightarrow I_{xy} = \int_0^b \int_0^h x\, y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{h^2b^2}{4}$$

Círculo

O momento polar de inércia do círculo de raio R em relação ao pólo O origem dos eixos centrais x e y é:



$$\mathrm{d}I_p = r^2\mathrm{d}A\;;\;\; \mathrm{d}A = 2\,\pi\, r\mathrm{d}r \;\;\Rightarrow I_p = \int_A \mathrm{d}I_p = \int_0^R 2\,\pi\, r^3\mathrm{d}r = \frac{\pi R^4}{2}$$

Tendo em conta que qualquer eixo que passa pelo ponto O é eixo de simetria $I_{xx} = I_{yy}$ e utilizando a relação 9.5:

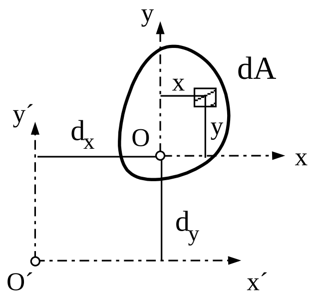
$$I_p = I_{xx} + I_{yy} \quad \Rightarrow \quad I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Os raios de giração são:

$$k_p = \sqrt{\frac{I_p}{A}} = \sqrt{\frac{\pi R^4/4}{2\pi R^2}} = \frac{R}{2}\,; \quad k_x = k_y = \frac{R\sqrt{2}}{4}$$

9.3 Variação dos momentos de inércia em relação ao translação dos eixos

O momento de inércia em relação a eixos do referencial $(x'\,,\,y')$ paralelos aos eixos do referencial $(x\,,\,y)$ situado a uma distância d (d_x, d_y), pode ser expresso em função dos momentos de inércia calculados em relação aos eixos $x\,,\,y$ e a distância d, sendo os momentos de inércia duma área elementar $\mathrm{d}A$:



$$\mathrm{d}I_{x'x'} = \mathrm{d}I'_{xx} = y'^2\,\mathrm{d}A = (y + d_y)^2\mathrm{d}A = y^2\,\mathrm{d}A + 2\,y d_y\,\mathrm{d}A + d_y^2\,\mathrm{d}A \quad \Rightarrow$$
$$I'_{xx} = \int_A y^2\,\mathrm{d}A + 2\,d_y \int_A y\,\mathrm{d}A + d_y^2 \int_A \mathrm{d}A = I_{xx} + 2\,d_y S_x + d_y^2\,A$$

Analogamente para o $I_{y'}$:

$$I_{y'} = I_y + 2\,d_x S_y + d_x^2\,A$$

e para o produto de inércia:

$$I_{x'y'} = I'_{xy} = \int_A (y + d_{y'})(x + d_{x'})\mathrm{d}A = I_{xy} + d_y S_x + d_x S_y + d_y d_x\,A$$

onde S_x e S_y são os momentos estáticos da área A em relação ao eixos x e y.
Se o referencial $(x\,,\,y)$ for central $(O \equiv G)$, os momentos estáticos S_x e S_y anulam-se e fica:

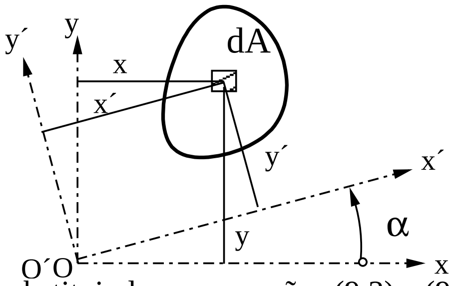
$$I_{x'x'} = I_{xG} + d_y^2\,A \tag{9.8}$$
$$I_{y'y'} = I_{yG} + d_x^2\,A \tag{9.9}$$
$$I_{x'y'} = I_{xyG} + d_y d_x\,A \tag{9.10}$$

Este resultado constitui o **teorema de Steiner** ou teorema de transmissão de momentos ou dos eixos paralelos.
O momento de inércia polar resulta:

$$I_{p'} = I_{O'} = I_{x'x'} + I_{y'y'} = I_G + (d_x^2 + d_y^2)\,A$$

9.4 Variação dos momentos de inércia em relação ao rotação dos eixos

Para determinar os momentos e o produto de inércia de uma figura plana relativamente a um referencial qualquer $(x'\,,\,y')$ que se obtém de $(x\,,\,y)$ através de uma rotação com ângulo α, escrevem-se as coordenadas do centróide da área elementar no novo referencial $(x'\,,\,y')$ nos antigos $(x\,,\,y)$.



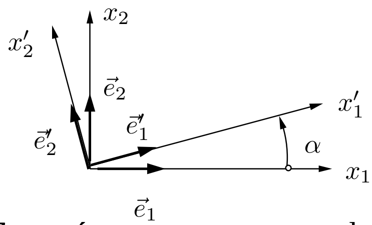
$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$y' = y\cos\alpha - x\sin\alpha$$

e substituindo nas equações (9.3) e (9.5) se obtém:

$$\begin{aligned}
I'_{xx} &= I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha \\
I'_{yy} &= I_{xx}\sin^2\alpha + I_{yy}\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha \\
I'_{xy} = I'_{yx} &= \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\sin 2\alpha + I_{xy}\cos 2\alpha
\end{aligned}$$

9.4.1 Transformação ortogonal do tensor da inércia

Os momentos e o produto de inércia relativamente a um referencial qualquer $(x'\,,\,y')$ que se obtém de $(x\,,\,y)$ através de uma rotação com ângulo α, podem ser obtidos por uma transformação ortogonal do tensor $\boldsymbol{I}$, com a matriz da transformação $\boldsymbol{T}$:



$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix};$$

$$T_{ij} = \cos(\vec{e}'_i,\,\vec{e}_j);$$

A matriz $\boldsymbol{T}$ contém as componentes dos versores dos novos eixos $(x'\,,\,y')$ nos antigos $(x\,,\,y)$. A matriz dos cosenos directores dos novos eixos nos antigos:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{x}'_1,\,\vec{x}_1) & \cos(\vec{x}'_1,\,\vec{x}_2) \\ \cos(\vec{x}'_2,\,\vec{x}_1) & \cos(\vec{x}'_2,\,\vec{x}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

A matriz $\boldsymbol{T}$ é ortogonal $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T}$.
Os tensor da inércia no novo referencial $\boldsymbol{I}'$ calcula-se pela relação da transformação ortogonal do tensor $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{T}\boldsymbol{I}\boldsymbol{T}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$I'_{xx} = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\sin^2\alpha - 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \qquad (9.11)$$
$$I'_{yy} = I_{xx}\sin^2\alpha + I_{yy}\cos^2\alpha + 2I_{xy}\sin\alpha\cos\alpha \qquad (9.12)$$
$$I'_{xy} = I'_{yx} = (I_{xx} - I_{yy})\sin\alpha\cos\alpha + I_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \qquad (9.13)$$

$$\boldsymbol{I'} = \begin{bmatrix} I'_{xx} & -I'_{xy} \\ -I'_{yx} & I'_{yy} \end{bmatrix}$$

9.5 Momentos principais de inércia

Para qualquer ponto O existe um determinados par de eixos (x_I , x_{II}) ortogonais para qual o produto de inércia anula-se e o momento de inércia I'_{xx} tem valor máximo. Estes eixos chamam-se **eixos principais** ou **direcções principais de inércia** e os momentos de inércia chamam-se **momentos principais de inércia**.
A partir da equação (9.11) temos:

$$\frac{\mathrm{d}I'_{xx}}{\mathrm{d}\alpha}|_{\alpha=\alpha_0} = -2I_{xy}\cos 2\alpha - (I_{xx} - I_{yy})\sin 2\alpha|_{\alpha=\alpha_0} = 0$$

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-I_{xy}}{\dfrac{I_{xx} - I_{yy}}{2}} \qquad \rightarrow \qquad \text{direcções principais } (\alpha_0)$$

Os momentos principais de inércia (sempre $I_I > I_{II}$):

$$I_I = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$I_{II} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

Os momentos principais de inércia representam os valores máximo e mínimo que os momentos de inércia da área da figura pode tomar em relação aos eixos ortogonais com origem no ponto O qualquer. Se o ponto $O \equiv G$ for o centro de gravidade da figura o referencial (x_I , x_{II}) que diagonaliza o tensor da inércia chama-se **referencial principal central de inércia**.

Utilizando a transformação ortogonal para os tensores bidimensionais

Interesse agora a transformação de referencial (x , y) para (x_I , x_{II}) - referencial principal - em relação a qual o tensor de inércia é diagonal. As componentes deste tensor chamam-se momentos principais de inércia.

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{I''} = \begin{bmatrix} I_I & 0 \\ 0 & I_{II} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{I''} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{T}^T$$

Utilizando a circunferência de Mohr (tensores bidimensionais)

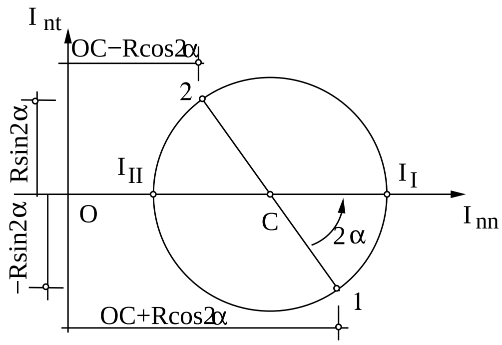
Em alternativa pode-se recorrer ao circunferência de Mohr, o que é uma representação gráfica da lei de transformação do tensor $\boldsymbol{I}$.

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$

Os par $(I_{xx},\, -I_{xy})$ e $(-I_{yx},\, I_{yy})$ representam as componentes do tensor associadas à direcção x e y, respectivamente.

- Marquem-se na circunferência, as componentes do tensor no referencial rodado, $(x,\, y)$:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} OC + R\cos 2\alpha & -R\sin 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha & OC - R\cos 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_{yy} \end{bmatrix}$$



$$OC = \frac{I_I + I_{II}}{2}$$

$$R = \frac{I_I - I_{II}}{2}$$

Convenção: a componente $\boldsymbol{I}_{yx}$ marca-se na circunferência de Mohr com sinal trocado. (Os pontos 1 e 2 tem as coordenadas $1(I_{xx}\,, -I_{xy})$ e $2(I_{xx}\,,\, I_{yx})$)

- Fórmulas:

$$OC = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{|I_{xy}|}{\dfrac{I_{xx} - I_{yy}}{2}} \qquad \rightarrow \qquad \text{direcções principais}$$

$$I_I = OC + R \qquad I_{II} = OC - R$$

Nota-se que a rotação real dos eixos coordenados é no sentido contrario com metade do ângulo à rotação na circunferência de Mohr.

Nota:

$$OC = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{I_I + I_{II}}{2} \qquad \text{(é invariante)}$$

- Cada ponto da circunferência representa as componentes do tensor associadas a uma das direcções, a qual roda com um ângulo duplo e em sentido contrário (-2α) ao dos respectivos eixos coordenados (α).

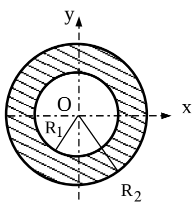
9.6 Momentos de inércia das figuras compostas

Uma figura pode ser dividida em figuras simples. Nestas condições, os momentos de inércia da figura composta a um eixo obtém-se por soma algébrica (soma/diferença) dos momentos de inércia de cada figura componente em relação a esse eixo. Os momentos de inércia das figuras geométricas elementares encontram-se nas tabelas.

$$I_x = \sum I_{xi}\,; \qquad I_y = \sum I_{yi}\,; \qquad I_p = \sum I_{pi} \tag{9.14}$$

O raio de giração de uma superfície composta **não** é igual à soma dos raios de giração parcelares. Para calcular o raio de giração é necessário calcular o momento de inércia da figura composta.

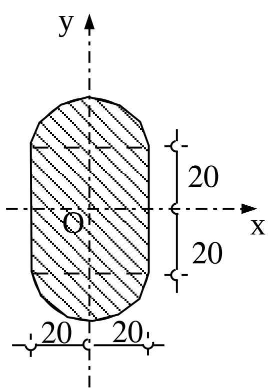
Problema 9.9 *Exemplo de cálculo para um anel com raio R_1 e R_2:*



$$I_p = I_p^2 - I_p^1 = \frac{\pi R_2^4}{2} - \frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4)$$

Contudo, antes de adicionar/(subtrair) os momentos de inércia das áreas parcelares, poderá ser necessário utilizar o teorema dos eixos paralelos e/ou rodar os eixos para transferir cada momento de inércia para o eixo desejado.

Problema 9.10 *Calcule os momentos de inércia I_x e I_y para a figura composta.*



$$I_x = I_x^{quad} + 2\, I_x^{sc} = I_{xG}^{quad} + 2(I_{xG}^{sc} + A^{sc}\, d^2)$$

$$I_{xG}^{sc} = \frac{20^4\pi}{8} - \frac{20^2\pi}{2}\left(\frac{80}{3\pi}\right)^2 = 17561.1mm^4$$

$$I_x = \frac{40^4}{12} + 2\left(17561.1 + \frac{\pi 20^2}{2}\left(\frac{80}{3\pi} + 20\right)^2\right) = 1268318mm^4$$

$$I_y = I_y^{quad} + 2\, I_y^{scirc} = I_{yG}^{quad} + 2\, I_{xG}^{sc}$$

$$I_y = \frac{40^4}{12} + 2\,\frac{\pi 20^4}{8} = 338997mm^4$$

Para facilitar os cálculos usam-se as folhas de cálculo (Tabela *Problema 9.11*). Divide-se a figura em áreas simples, parcelares, com posição do centro de gravidade e momentos de inércia centrais conhecidos. Escolha-se um referencial arbitrário $(x\ ,\ y)$.

Comp.	A_i	x_{G_i}	y_{G_i}	S_{xi}	S_{yi}	x_G	y_G	I_{xGi}	I_{yGi}	I_{x_i}	I_{y_i}
$\sum$	$\sum A_i$	-	-	$\sum S_{x_i}$	$\sum S_{y_i}$	x_G	y_G	-	-	$\sum I_{x_i}$	$\sum I_{y_i}$

Definições:

A_i - áreas parcelares;

x_{G_i}, y_{G_i}- distâncias à referencial $(x\ ,\ y)$ dos centros de gravidade das áreas parcelares;

$S_{xi} = A_i y_{G_i}$, $S_{yi} = A_i x_{G_i}$ - momentos estáticos das áreas parcelares em relação aos eixos do referencial (x, y);

$x_G = \dfrac{\sum S_{x_i}}{\sum A_i}$, $y_G = \dfrac{\sum S_{y_i}}{\sum A_i}$ - distância do centro de gravidade figura composta no referencial (x, y);

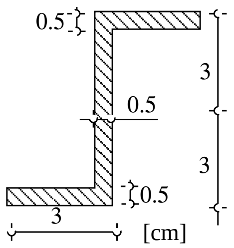
I_{xGi}, I_{yGi} - momentos de inércia baricéntricos das áreas parcelares;

$I_{xi} = I_{xGi} + A_i(y_{G_i} - y_G)^2$, $I_{yi} = I_{yGi} + A_i(x_{G_i} - x_G)^2$ - momentos de inércia parcelares, em relação ao centro de gravidade da secção composta (Teorema de Steiner).

$I_{xx} = \sum I_{x_i}$, $I_{yy} = \sum I_{y_i}$ - momentos de inércia da figura composta, em relação aos eixos centrais da secção.

Tabela 9.1: Folha de cálculo

Problema 9.11 *Determine os momentos principais de inércia para a seguinte figura composta:*



	A_i	x_{G_i}	y_{G_i}	S_{xi}	S_{yi}	I_{xGi}	I_{yGi}	I_{x_i}	I_{y_i}
1	2.5	0	0	0	0	5.208	0.052	5.208	0.052
2	1.5	1.25	2.75	1.875	4.125	0.03125	1.125	11.375	4.668
3	1.5	-1.25	-2.75	-1.875	-4.125	0.03125	1.125	11.375	4.668
$\sum$	5.5	-	-	0	0	-	-	27.9583	6.99

$$I_{x_1} = \frac{0.5 \times 5^3}{12} = 5.208\, cm^4\ ; \quad I_{y_1} = \frac{5 \times 0.5^3}{12} = 0.0520833\, cm^4$$

$$I_{x_{G_2}} = I_{x_{G_3}} = \frac{3 \times 0.5^3}{12} = 0.03125\, cm^4; \quad I_{x_{G_2}} = I_{y_{G_3}} = \frac{0.5 \times 3^3}{12} = 1.125\, cm^4$$

$$I_{x_2} = I_{x_3} = 0.03125 + 1.5 \times 2.75^2 = 11.375\, cm^4$$

$$I_{y_2} = I_{y_3} = 1.125 + 1.5 \times 1.25^2 = 3.46875\, cm^4$$

$$I_{xy} = 0 + 2 \times 3 \times 0.5 \times 1.25 \times 2.75 = 10.31\, cm^4$$

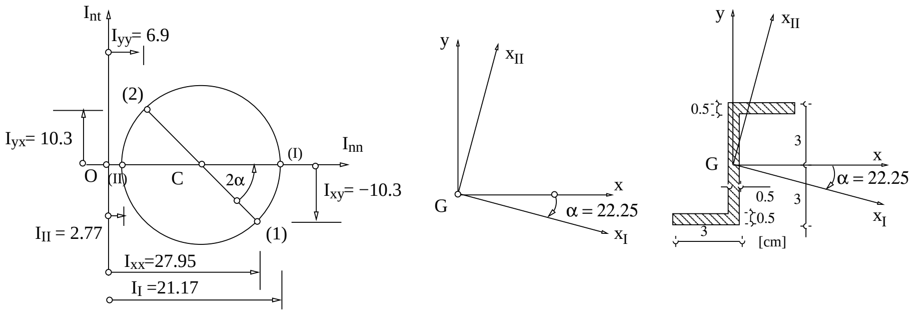
A matriz de inércia é:

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 27.9583 & -10.31 \\ -10.31 & 6.99 \end{bmatrix}$$

Marcam-se no referencial (I_{nn}, I_{nt}) os pontos (1) e (2) com as coordenadas $(27.95\,,\,-10.31)$ e $(6.9\,,\,10.31)$, respectivamente.
Calculam-se a posição do centro da circunferência e o raio:

$$OC = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{27.95 + 6.99}{2} = 17.47\, mm^4$$

$$R = \sqrt{(I_{xx} - OC)^2 + I_{xy}^2} = \sqrt{x^2 + 10.31^2} \cong 14.70\, mm^4$$



As momentos principais de inércia obtêm-se:

$$I_I = OC + R = 17.47 + 14.70 = 21.17 \text{ mm}^4$$

$$I_{II} = OC - R = 17.47 - 14.70 = 2.77 \text{ mm}^4$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{I_{xy}}{I_{xx} - OC} = \frac{10.31}{27.95 - 17.47}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\frac{10.31}{10.48} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22.25°$$

Resulta que a direcção principal x_I obtém-se rodando o eixo x de $\alpha = 22.25°$ no sentido horário.

9.7 Problemas propostos

Apêndice A

Circunferência de Mohr para tensores bidimensionais de 2ª ordem

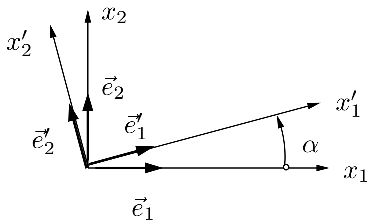
A circunferência de Mohr, para tensores de 2ª ordem simétricos, é uma representação gráfica da lei de transformação.

A.0.1 Tensores bidimensionais

Seja

$$\boldsymbol{C}' = \begin{bmatrix} C_I & 0 \\ 0 & C_{II} \end{bmatrix}$$

a matriz de um tensor de 2ª ordem simétrico, reduzido à forma canónica, e sejam x_I e x_{II} os eixos principais.



- Considere-se a transformação de coordenadas $(x_I,\, x_{II}) \rightarrow (x_1,\, x_2)$
- A matriz de transformação $\boldsymbol{T}$ é dada então por:

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos(\vec{e}_1,\, \vec{e}_I) & \cos(\vec{e}_1,\, \vec{e}_{II}) \\ \cos(\vec{e}_2,\, \vec{e}_I) & \cos(\vec{e}_2,\, \vec{e}_{II}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

- O tensor $\boldsymbol{C}'$ transforma-se de acordo com a lei $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{C}'\,\boldsymbol{T}^T$, ou

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_I & 0 \\ 0 & C_{II} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

  Efectuando os produtos matriciais, obtém-se:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} C_I\cos^2\alpha + C_{II}\sin^2\alpha & (C_{II} - C_I)\sin\alpha\cos\alpha \\ (C_{II} - C_I)\sin\alpha\cos\alpha & C_I\sin^2\alpha + C_{II}\cos^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_I + C_{II}}{2} + \dfrac{C_I - C_{II}}{2}\cos 2\alpha & -\dfrac{C_I - C_{II}}{2}\sin 2\alpha \\ -\dfrac{C_I - C_{II}}{2}\sin 2\alpha & \dfrac{C_I + C_{II}}{2} - \dfrac{C_I - C_{II}}{2}\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

Fazendo a notação

$$OC \equiv \frac{C_I + C_{II}}{2} \qquad R = \frac{C_I - C_{II}}{2}$$

o novo tensor $\boldsymbol{C}$ escreve-se

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} OC + R\cos 2\alpha & -R\sin 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha & OC - R\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

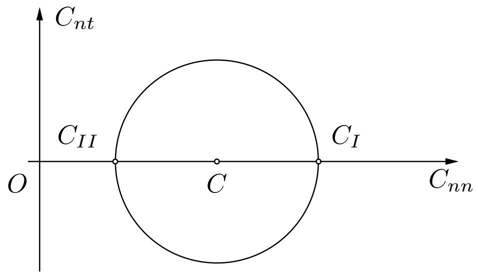
- Considerando a 1ª (ou a 2ª) linha da matriz e designando por C_{nn} a componente de índices iguais e por C_{nt} a outra componente,

$$\begin{cases} C_{nn} = OC + R\cos 2\alpha \\ C_{nt} = -R\sin 2\alpha \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_{nn} - OC = R\cos 2\alpha \\ C_{nt} = -R\sin 2\alpha \end{cases}$$

Quadrando e somando obtém-se

$$(C_{nn} - OC)^2 + C_{nt}^2 = R^2$$

o que representa a equação de uma circunferência num referencial $(C_{nn},\, C_{nt})$, com o centro em $(OC, 0)$ e de raio R.



$$OC = \frac{C_I + C_{II}}{2}$$

$$R = \frac{C_I - C_{II}}{2}$$

- Marquem-se na circunferência, as componentes do tensor no referencial rodado, $(x_1,\, x_2)$:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} OC + R\cos 2\alpha & -R\sin 2\alpha \\ -R\sin 2\alpha & OC - R\cos 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

Os par $(C_{11},\, C_{12})$ e $(C_{21},\, C_{22})$ representam as componentes do tensor associadas à direcção x_1 e x_2, respectivamente.

Convenção: a componente C_{21} marca-se na circunferência de Mohr com sinal trocado.

- Fórmulas:

$$OC = \frac{C_I + C_{II}}{2} = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} \qquad \text{(é invariante)}$$

$$C_I = OC + R \qquad C_{II} = OC - R$$

$$\tan 2\alpha = \frac{C_{12}}{\frac{C_{11} - C_{22}}{2}}$$

- Cada ponto da circunferência representa as componentes do tensor associadas a uma das direcções, a qual roda com um ângulo duplo e em sentido contrário (-2α) ao dos respectivos eixos coordenados (α).